JKMA Jurnal Kajian Matematika dan Aplikasinya
VOLUME 1 NOMOR 1, July 2020
e-ISSN: 2722-7650. http://journal2.um.ac.id/index.php/jkma

ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMI SEIVR PADA PENYAKIT HEPATITIS B

Nurul Subahtul[1], Toto Nusantara[1, *]
[1] Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Malang

Email: nurulsubahtul@gmail.com (*N. Suhbatul*), toto.nusantara.fmipa@um.ac.id (*T. Nusantara*)
* Corresponding Author

Abstract
In this study, the SEIVR epidemic model was used to analyze the stability of the spread Hepatitis B based on data obtained from the 2016 RI Health Data of East Java Province. In analyzing the model there are several procedures used, namely find the equilibrium point, analyzing the stability of the equilibrium point, find the basic reproduction number (R_0), and the last one doing the simulation based on the data obtained using the Maple17 program. Based on the research that has been done, two equilibrium points are obtained, namely the disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. If the reproduction number $R_0 < 1$ then the equilibrium point is stable asymptotically local, and if $R_0 > 1$ then the endemic equilibrium point is stable asymptotically local. For the cases of Hepatitis B based on data in the Province of East Java obtained basic reproduction numbers $R_0 = 8{,}648215155 \cdot 10^{-11} < 1$ which means Hepatitis B is no longer endemic at any given time.

Keywords: *Hepatitis B, SEIVR, basic reproduction number (R_0).*

Submitted: 03 Febuary 2020; Revised: 05 May 2020; Accepted Publication: 01 June 2020;
Published Online: July 2020
DOI: 10.17977/um055v1i1p27-32

PENDAHULUAN

Penyakit Hepatitis B merupakan infeksi serius pada organ hati yang disebabkan oleh Virus Hepatitis B (VHB). Hepatitis B termasuk jenis penyaki tmenular. Penderita Hepatitis B pada umumnya akan merasakan nyeri ulu hati, demam dan warna kuning pada kulit. Penyakit Hepatits B dapat dicegah dengan melakukan vaksinasi, dalam hal ini di Indonesia terdapat tiga kali tahap vaksinasi dan seseorang yang telah mendapatkan vaksin tiga kali serta seseorang yang telah sembuh dari penyakit Hepatitis B mempunyai peluang sangat kecil untuk tertular penyakit Hepatitis B (Kemenkes RI, 2017).

Penelitian tentang model penyebaran penyakit saat ini telah banyak dilakukan, salah satunya yaitu, penelitian dari Pratama (2014) yang membahas tentang analisis model epidemi SEIV pada peyebaran penyakit Hepatitis B. Dalam penelitian tersebut diperoleh bahwa penyakit Hepatitis B di Kabupaten Jember bersifat endemik.

Pada penelitian dari Pratama (2014) hanya mempertimbangkan laju vaksinasi secara keseluruhan dan individu yang telah sembuh dari penyakit akan masuk dalam kelas *Vaccinated*, sedangkan berdasarkan kondisi yang ada di Indonesia terdapat tiga tahap vaksinasi dan individu yang telah mendapat vaksin tiga kali serta individu yang sembuh dari penyakit akan memiliki kekebalan permanen.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Model epidemi SEIVR padapenyakit Hepatitis B

Kelas populasi dalam model epidemic SEIVR pada penyakit Hepatitis B dibagi menjadi lima, yaitu kelas populasi rentan (*Susceptible*), kelas populasi yang terpapar (*Exposed*), kelas populasi yang terinfeksi (*Infected*), kelas populasi yang tervaksin (*Vaccinated*), dan kelas populasi yang telah sembuh (*Recovered*).
Berikut merupakan persamaan model epidemi SEIVR pada penyakit Hepatitis B:

$$\frac{dS}{dt} = (1-\rho)\pi - \beta SI + (1-\eta)V - (\sigma+\mu)S, \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\alpha+\mu)E, \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - (\gamma+\mu)I, \quad (3)$$

$$\frac{dV}{dt} = \rho\pi + \sigma S - \big((1-\eta)+\eta+\mu\big)V, \quad (4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \eta V - \mu R. \quad (5)$$

Terdapat asumsi-asumsi yang digunakan dalam model, yaitu sebagai berikut:

a. Populasi bersifat tertutup (tidak terdapat migrasi).
b. Terdapat tiga tahap vaksin.
c. Individu yang telah mendapat vaksin tiga kali dan individu yang telah sembuh akan memiliki kekebalan permanen.
d. Laju kematian alami pada tiap kelas populasi dinyatakan μ.
e. Laju individu yang tervaksin dinyatakan ρ.
f. Laju kelahiran dinyatakan π.
g. Laju transisi individu rentan menjadi terinfeksi dinyatakan β.
h. Laju transisi individu terpapar menjadi terinfeksi dinyatakan α.
i. Laju transisi individu terinfeksi menjadi sembuh dinyatakan γ.
j. Laju individu yang menerima vaksin ketiga dinyatakan η.
k. Proporsi individu yang menerima vaksin pertama dan kedua dinyatakan σ.

2. Sistem Persamaan Diferensial

Definisi 1 (Bronson & Costa, 2007)
Suatu sistem persamaan diferensial linier dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x'(t) = Ax(t).$$

Definisi 2 (Zill & Cullen, 2009)
Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan sistem *autonomous* jika dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

dengan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dan fungsi$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1,2,3, \dots, n$ tidak bergantung pada variabel t.

Analisis kestabilan suatu persamaan diferensial tak linier dapat dilakukan melalui linierisasi, yaitu dengan menggunakan matriks Jacobian.

Definisi 3 (Zill & Cullen, 2009)

Matriks Jacobian digunakan untuk melinierisasi suatu sistem persamaan diferensial yang tak linier. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial *autonomous* pada Definisi 2, maka matriks Jacobian$(Jf(\bar{x}))$ dari sistem tersebut adalah

$$Jf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

3. Nilai Eigen danVektor Eigen

Definisi 4 (Zahnur, 2017)

Untuk matriks $A_{n\times n}$, suatu bilangan real λ disebut nilai eigen dari matriks A jika terdapat sebuah vektor tak nol x di $\mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Persamaan $Ax = \lambda$ xekuivalen dengan persamaan $(A - \lambda I)x = 0$, sehingga semua sifat berikut ini adalah ekuivalen:

1. λ adalah nilai eigen dari A.
2. $(A - \lambda I)x = 0$ memiliki solusi tak trivial.
3. $A - \lambda I$ adalah singular.
4. $\det(\mathrm{A} - \lambda I) = 0$.

Vektor untuk λ adalah solusi tak nol x untuk persamaan $(A - \lambda I)x = 0$ dan berdasarkan sifat 4, nilai eigen adalah akar – akar dari persamaan karakteristik $\det(\mathrm{A} - \lambda I) = 0$.

4. Kestabilan titik ekuilibrium

Titik ekuilibrium adalah suatu solusi yang bersifat konstan untuk waktu yang lama. Titik ekuilibrium dapat diperoleh jika$\frac{dx_1}{dt} = 0, \frac{dx_2}{dt} = 0, \dots, \frac{dx_n}{dt} = 0$.

Definisi 5 (Strogatz, 1994):

Misalkan diberikan persamaan karakteristik dari $\det(A - \lambda I) = 0$ seperti berikut:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{6}$$

Berdasarkan persamaan (6), dapat diperoleh nilai – nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

Analisis kestabilan dilakukan untuk nilai eigen yang diperoleh dari persamaan diatas, sehingga terdapat tiga kasus yang bergantung pada nilai $D = b^2 - 4ac$.

Kasus I $D > 0$, dimana $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

1. Jika nilai eigen negatif$(\lambda_1 < 0)$ dan $(\lambda_2 < 0)$ maka titik ekuilibrium bersifat simpul stabil.
2. Jika nilai eigen positif$(\lambda_1 > 0)$ dan $(\lambda_2 > 0)$ maka titik ekuilibrium bersifatsimpul tidak stabil.
3. Jika nilai eigen positif$(\lambda_1 > 0)$ dan negatif $(\lambda_2 < 0)$ maka titik ekuilibrium bersifat sadel.

Kasus II $D = 0$, dimana $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

1. Jika nilai eigen negatif $(\lambda < 0)$ maka titik ekuilibrium bersifat stabil.
2. Jika nilai eigen positif$(\lambda > 0)$ maka titik ekuilibrium bersifat tidak stabil.

Kasus III $D < 0$, dimana$\lambda_{1,2} = a \pm bi$.

1. Jika nilai $a > 0$ maka titik ekuilibrium bersifat spiral tidak stabil.
2. Jika nilai $a < 0$ maka titik ekuilibrium bersifat spiral stabil.
3. Jika nilai $a = 0$ nilai eigen merupakan imaginer murni, maka titik ekuilibrium bersifat selalu stabil.

5. KriteriaRouth – Hurwitz

Misalkan diberikan persamaan karakteristik berderajat n sebagai berikut :

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{7}$$

Dengan koefisien $a_i$adalah bilangan real, di mana $i = 1,2,3, \dots, n$. Persamaan karakteristik (7) kemudian dapat dibentuk menjadi matriks $H_n$dimana $H_n$merupakan matriks Hurwitz dengan koefisien $b_i$yang didefinisikan sebagai berikut :

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & \cdots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

dimana $b_i = \begin{cases} a_i, & i \le n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$

Teorema 2.1 (Merkin, 1997)

Persamaan karakteristik mempunyai akar-akar yang bagian realnya bernilai negatif jika dan hanya jika semua determinan matriks *Hurwitz* bernilai positif atau

$$\det(H_i) > 0, \quad i = 1,2, \dots, n.$$

Pada penelitian ini, dilakukan analisis kestabilan model epidemi SEIVR pada penyakit Hepatitis B khususnya di daerah Jawa Timur pada tahun 2016. Berdasarkan persamaan (1) – (5) diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.Titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh:

$$(S^0, E^0, I^0, V^0, R^0) = \left(\frac{-\pi(-\eta\rho-\mu\rho+\mu+1)}{(1+\mu)(\sigma+\mu)-\sigma(1-\eta)}, 0, 0, \frac{\pi(\rho\mu+\sigma)}{(1+\mu)(\sigma+\mu)-\sigma(1-\eta)}, \frac{\eta\pi(\rho\mu+\sigma)}{\mu\big((1+\mu)(\sigma+\mu)-\sigma(1-\eta)\big)}\right),$$

sedangkan untuk titik ekuilibrium endemik diperoleh:

$$(S^*, E^*, I^*, V^*, R^*) = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)}{\alpha\beta}, \frac{\begin{array}{c}(\pi-\rho\pi)\big(\alpha\beta(\varepsilon+\eta+\mu)\big)+\big(\varepsilon\rho\pi\alpha\beta+\varepsilon\sigma(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)\big) \\ -\big((\alpha+\mu)(\gamma+\mu)(\sigma+\mu)(\varepsilon+\eta+\mu)\big)\end{array}}{\alpha\beta(\varepsilon+\eta+\mu)(\alpha+\mu)}, \\ \frac{\begin{array}{c}(\pi-\rho\pi)\big(\alpha\beta(1-\eta)\big)+\Big((1-\eta)\big(\rho\pi\alpha\beta+\sigma(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)\big)\Big) \\ -\big((\alpha+\mu)(\gamma+\mu)(\sigma+\mu)(1-\eta)\big)\end{array}}{\beta(1-\eta)(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)}, \frac{\rho\pi\alpha\beta+\sigma(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)}{\alpha\beta(1-\eta)} \\ , \frac{\begin{array}{c}\alpha\gamma\Big((\pi-\rho\pi)\big(\alpha\beta(1-\eta)\big)+\Big((1-\eta)\big(\rho\pi\alpha\beta+\sigma(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)\big)\Big)\Big) \\ +\eta\big(\rho\pi\alpha\beta+\sigma(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)\big)(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)\end{array}}{\mu\big(\alpha\beta(1-\eta)(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)\big)} \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya akan dianalasis kestabilan titik ekuilibrium pada model dengan mensubtitusikan titik ekuilibrium kedalam matriks Jacobian, sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I-(\sigma+\mu) & 0 & -\beta S & (1-\eta) & 0 \\ \beta I & -(\alpha+\mu) & \beta S & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -(\gamma+\mu) & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \eta & -\mu \end{bmatrix}.$$

Untuk menguji kestabilan titik ekuilibriumnya dilakukan dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian. Dalam hal ini, persamaan karakteristik yang telah diperoleh dari $|J - \lambda I| = 0$ dianalisis menggunakan kriteria *Routh – Hurwitz*. Sehingga diperoleh $R_0 < 1$ untuk titik ekuilibrium bebas penyakit dan $R_0 > 1$ untuk titik ekuilibrium endemik, dimana $R_0 = \frac{\beta S\alpha}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)}$ dengan $S = \frac{-\pi(-\eta\rho-\mu\rho+\mu+1)}{(1+\mu)(\sigma+\mu)-\sigma(1-\eta)}$.

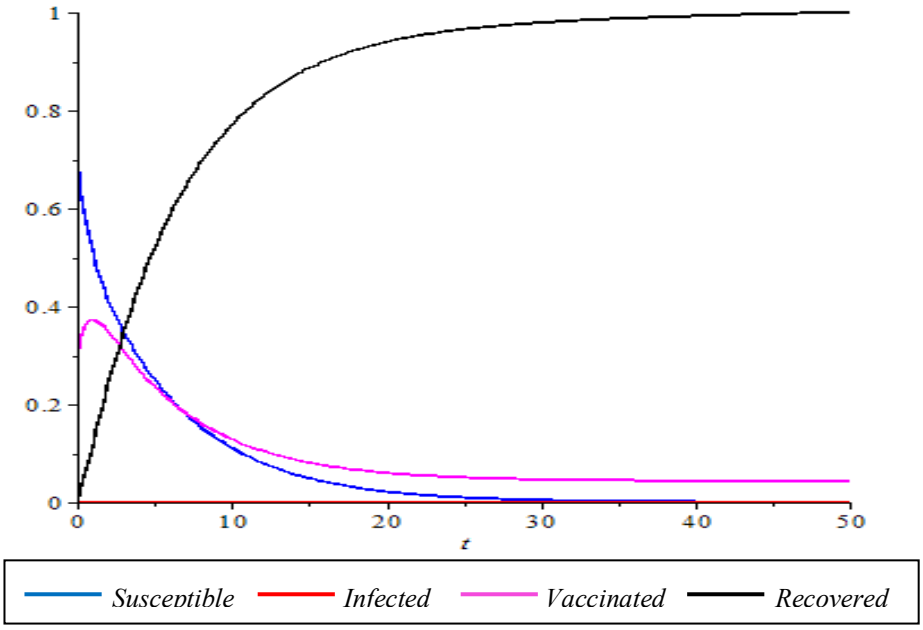
Simulasi Model

Pada pembahasan selanjutnya, model epidemic SEIVR pada penyakit Hepatitis B akan dianalisis secara numerik dengan bantuan program Maple17. Dengan memasukkan nilai parameter – parameter yang sudah ditentukan seperti di Tabel 1.

Tabel 1. Nilai parameter yang sudah ditentukan.

Parameter	**Nilai**
ρ	2,87
π	0,0152
μ	0,014
η	0,34
β	0,00000048
α	4,8
σ	0,659
γ	2

Hasil simulasi numerik dari model epidemi SEIVR dengan nilai awal $S(0) = 0{,}709$; $E(0) = 0$; $I(0) = 0{,}000075$; $V(0) = 0{,}291$; dan $R(0) = 0{,}000075$, ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Hasil Simulasi Model Epidemi SEIVR

Dengan estimasi parameter di atas maka diperoleh $R_0 = 8{,}515521843 \cdot 10^{-8} < 1$. Dan berdasarkan gambar di atas, sistem akan stabil asimtotik menuju titik ekuilibrium $P^0 = (S^0, E^0, I^0, V^0, R^0) = (0{,}000122; 0; 0; 0{,}0429; 1{,}0429)$ artinya proporsi individu rentan penyakit akan menuju *0,000122*, tidak ada individu yang terpapar penyakit, tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, proporsi individu yang divaksinasi *0,0429*, dan proporsi individu sembuh *1,0429* Hal ini menunjukkan bahwa pada saat$R_0 < 1$ penyakit Hepatitis Bakan menghilang dari populasi. Dengan demikian dalam selang waktu yang lama, penyakit Hepatitis B di Jawa Timur tidak lagi menjadi endemik atau akan menghilang dari populasi.

PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Analisis penyebaran penyakit Hepatitis B dengan model SEIVR mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit P^0 dan titik ekuilibrium andemik P^*. Titik ekuilibrium bebas penyakit dikatakan stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ sedangkan

untuk titik ekuilibrium endemik akan dikatakan stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$, dimana $R_0 = \frac{\beta\alpha(-\pi(-\eta\rho-\mu\rho+\mu+1))}{((1+\mu)(\sigma+\mu)-\sigma(1-\eta))(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)}$.

2. Hasil dari simulasi data kasus Hepatitis B di Propinsi Jawa Timur pada tahun 2016 menunjukkan nilai $R_0 = 8{,}648215155 \cdot 10^{-11} < 1$, hal tersebut berarti bahwa penyakit Hepatitis B tidak menjadi endemik atau penyakit akan hilang pada waktu tertentu.

DAFTAR RUJUKAN

Kementerian Kesehatan RI. 2017. *Profil Kesehatan Indonesia 2016*. Pusat Data dan Informasi.

Kementerian Kesehatan RI. 2017. *Profil Kesehatan JawaTimur 2016*. Pusat Data dan Informasi.

Pratama, KurniaNur. 2014. *Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIV (Susceptible – Exposed – Infected – Vaccinated) pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B di Kabupaten Jember*. Skripsi. UniversitasJember.

Bronson, R, dan Costa, G B. 2007. *Differential Equation*. New Jersey.

Zahnur. 2017. *Modul Praktikum TPD*. Universitas Syiah Kuala. Aceh.

Zill, D. G, dan Cullen, M. R. 2009. *Differential Equation With Boundary Value Problem*. Canada Nelson Education Ltd.

Strogatz, S H. 1994. *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications to Physics, Biplogy, Chemistry, And Engineering*. MA: Addison Wesley.

Merkin, D, R. 1997. *Introduction to the Theory of Stability.* New York:Springer.