Jurnal Kajian Matematika dan Aplikasinya
VOLUME 2 NOMOR 2, July 2021
e-ISSN: 2722-7650. http://journal2.um.ac.id/index.php/jkma

# IDEMPOTEN PRIMITIF SKEMA ASOSIASI GRUP UNTUK MATRIKS GRUP ATAS $\mathbb{Z}_3$

**Nur Hamid[1,*], Cahyu Guswita[1], Saiful Islam[1], M. Faiz Nailun Ni'am[1]**
[1]Prodi Pendidikan Matematika, Fakultas Sosial Dan Humaniora, Universitas Nurul Jadid

Email : nurhamid@unuja.ac.id (*N. Hamid*), ayu.cahyu99@gmail.com (*C. Guswita*), saifulislam022020@gmail.com (*S. Islam*), m.faiz.nailun@gmail.com (*M. F. N. Ni'am*)
*****Corresponding Author

***Abstract***
*Some combinatorial problems in Mathematics can be studied via association scheme. By this scheme, algebra structure called Bose-Mesner algebra can be obtained. In this article, we show the explicit forms of the idempotent primitive of an association scheme for the group of order 48.*

***Keywords****: Association scheme, idempotent primitif*

*Submitted: 08 Juni 2021 ; Revised: 24 Juli 2021 ; Accepted Publication: 31 Juli 2021;*
*Published Online: July 2021*
*DOI:10.17977/um055v2i2p21-25*

## PENDAHULUAN

Setelah diperkenalkan oleh (Martin & Tanaka, 2009), skema asosiasi menjadi konsep yang bermanfaat untuk pembelajaran grup, teori graf, teori pengkodean, dan area-area lain yang berkaitan. Salah satu contoh skema asosiasi yang sering digunakan adalah skema asosiasi grup. Pada skema ini, grup yang digunakan dibagi menjadi beberapa bagian sesuai dengan banyaknya kelas konjugasi. Skema ini digunakan dalam beberapa penelitian, seperti penelitian yang dilakukan oleh (Bannai & Ito, Algebraic Combinatorics I Association Schemes, 1984).

Skema asosiasi grup dapat memunculkan suatu struktur aljabar baru. Aljabar ini dinamakan aljabar Bose-Mesner. Aljabar Bose-Mesner sendiri dibentuk oleh matriks-matriks ketetanggaan yang berkaitan dengan skema asosiasi grup. Penelitian yang berhubungan dengan aljabar ini dapat dilihat dalam beberapa referensi [ (Jose Maria P. Balmaceda, 1994), (Hamid & Oura, 2019), (Bannai & Ito, Algebraic Combinatorics I Association Schemes, 1984)]

Karena aljabar Bose-Mesner dapat dipandang sebagai ruang vektor, maka aljabar tersebut memiliki suatu basis. Dalam artikel, diberikan basis untuk aljabar Bose-Mesner dari skema asosiasi grup yang berasal dari idempoten primitif aljabar tersebut. Grup yang digunakan adalah grup matriks berukuran $2 \times 2$ dengan determinan tidak sama dengan 0 dan entri-entrinya berasal dari $\mathbb{Z}_3$. Untuk komputasi, alat yang digunakan adalah SageMath (Developers, 2020).

**Dasar Teori**

Untuk mengawali artikel ini, diberikan definisi skema asosiasi grup. Grup $G$ yang digunakan adalah grup matriks berukuran $2 \times 2$ dengan determinan tidak sama dengan 0 dan entri-entrinya berasal dari $\mathbb{Z}_3$. Banyaknya anggota dari $G$, dinotasikan dengan $|G|$, adalah 48.

**Definisi 1**

Misalkan $G$ adalah suatu grup berhingga. Misalkan pula $C_0 = e, C_1, \dots, C_d$ merupakan kelas-kelas konjugasi dari $G$ dengan $e$ adalah elemen identitas dari $G$. Untuk $i = 0,1,2,3, \dots d$, didefinisikan

$$(x, y) \in R_i \iff yx^{-1} \in C_i.$$

Pasangan $\left(G, \{R_i\}_{\{0 \le i \le d\}}\right)$ merupakan suatu skema assosiasi dan disebut sebagai skema assosiasi grup dari $G$.

Setelah diberikan definisi dari skema asosiasi grup, berikutnya didefinisikan aljabar Bose-Mesner. Berikut definisi formalnya.

**Definisi 2**

Diberikan matriks-matriks $A_i$ yang didefinisikan sebagai

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & if\ (x, y) \in R_i, \\ 0 & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Matriks-matriks $A_i$ memenuhi

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_{k.}$$

Matriks-matriks $A_i$ dinamakan matriks ketetanggaan dan membentuk suatu basis untuk aljabar Bose-Mesner $\mathcal{A}$.

Matriks-matriks $A_0, A_1, A_0, \dots A_d$ membangun Aljabar Bose Mesner $\mathcal{A}$. Aljabar $\mathcal{A}$ memiliki basis kedua $E_0, E_1, E_0, E_3, \dots E_d$ yang merupakan idempoten primitif dan memenuhi

$$E_i \bullet E_j = \frac{1}{|G|} q_{ij}^k E_k,$$

dengan $\bullet$ menotasikan operasi perkalian entri pada posisi yang sama. Untuk setiap $i = 0,1,2, \dots d$, misalkan $E_i^*$ dan $A_i^*$ merupakan matriks diagonal dengan ukuran $|G|$ x $|G|$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\left(E_i^*\right)_{x,x} := \begin{cases} 1, x \in C_i \\ 0, x \notin C_i \end{cases} (\ x \in G\ ),$$

$$\left(A_i^*\right)_{x,x} := |G| (E_i)_{x,x} \ \ (x \in G\ ).$$

Kemudian $E_0^*, E_1^*, \dots. E_d^*$ menjadi sebuah basis dari Aljabar dual Bose-Mesner $\mathcal{A}^*$.

Sebelum matriks ketetanggan untuk skema asosiasi grup yang telah dijelaskan diberikan, grup $G$ diurutkan berdasarkan kelas-kelas konjugasi berikut.

| | $C_0$ | $C_1$ | $C_0$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Rep | $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$ |
| $\lvert C_i\rvert$ | 1 | 8 | 1 | 8 | 6 |

| | $C_5$ | $C_6$ | $C_7$ |
|---|---|---|---|
| Rep | $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ |
| $\lvert C_i\rvert$ | 6 | 6 | 10 |

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, basis untuk aljabar Bose-Mesner yang akan diberikan dalam artikel ini adalah basis yang berasal dari idempoten primitif. Berikut definisi idempoten primitif.

**Definisi 3**
Matriks-matriks $E_0, E_1, \dots, E_d \in \mathcal{A}$ dinamakan *idempoten primitif* jika memenuhi

$$E_i E_j = \delta_{ij} E_i$$

dengan

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

dan

$$\sum_{i=0}^{d} E_i = I$$

dengan $I$ merupakan matriks identitas di $\mathcal{A}$.

## Hasil dan Pembahasan

Misalkan $H$ merupakan tabel karakter dari $G$. Penjelasan lebih mendalam tentang tabel karakter dapat dilihat di rujukan (Bannai & Ito, Algebraic Combinatorics I Association Schemes, 1984) . Bentuk eksplisit dari $H$ adalah

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -0 & -1 & 0 & \zeta_8^3 + \zeta_8 & -\zeta_8^3 - \zeta_8 & 0 \\ 0 & 1 & -0 & -1 & 0 & -\zeta_8^3 - \zeta_8 & \zeta_8^3 + \zeta_8 & 0 \\ 0 & 1 & -0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

dengan

$$\zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Didefinisikan suatu matriks diagonal $M$ yang entri diagonalnya adalah kolom pertama matriks $H$ sebagai berikut

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Misalkan $K$ merupakan suatu matriks diagonal yang entri-entrinya adalah kardinalitas masing-masing kelas konjugasi dari $G$. Dengan cara melakukan langkah-langkah yang pada referensi (Bannai & Ito, Algebraic Combinatorics I Association Schemes, 1984), dapat didapatkan suatu matriks $Q$

$$Q = |G|\ P^{-1}.$$

dengan $P$ didefinisikan sebagai

$$P = MHK.$$

Matriks $P$ dapat ditulis sebagai

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & -4 & 0 & 3\zeta_8^3 + 3\zeta_8 & -3\zeta_8^3 - 3\zeta_8 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -4 & 0 & -3\zeta_8^3 - 3\zeta_8 & 3\zeta_8^3 + 3\zeta_8 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 8 & 6 & -6 & -6 & -12 \\ 1 & 8 & 1 & 8 & 6 & 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Bentuk eksplisit dari $Q$ adalah

$$Q = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 9 & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -16 & 9 & 9 & -4 & -4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -2\zeta_8^3 - 2\zeta_8 & 2\zeta_8^3 + 2\zeta_8 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2\zeta_8^3 + 2\zeta_8 & -2\zeta_8^3 - 2\zeta_8 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah yang telah dilakukan juga dapat dilihat pada (Hamid, 2016).
Dengan memanfaatkan matriks $Q$, didapat idempoten-idempoten primitif dari aljabar $\mathcal{A}$ dalam teorema berikut.

**Teorema 4**
Idempoten-idempoten $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan-persamaan:

$$E_k = \frac{1}{|G|} \sum_{i=0}^{d} Q_{(i,k)} A_i,$$

untuk $0 \leq k \leq 7$.
*Bukti.*
Dengan melakukan penghitungan langsung, dapat ditunjukkan bahwa matriks-matriks $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$ memenuhi sifat-sifat idempoten primitif.

Karena ordo dari matriks-matriks $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$ cukup besar jika tuliskan secara eksplisit, matriks-matriks tersebut tidak ditulis.

## PENUTUP

Dengan menggunakan skema Assosiasi group dan menemukan Aljabar Bose Mesner serta mengalikan dengan konstanta $Q$ yang kita peroleh, maka dapat ditemukan matriks $E_0, \ldots, E_d$ yang merupakan basis lain untuk aljabar $\mathcal{A}$.

## DAFTAR RUJUKAN

Bannai, E., & Ito, T. (1984). *Algebraic Combinatorics I Association Schemes.* California: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.

Bannai, E., & Munemasa, A. (1995). The Terwilliger Algebras of Group Association Schemes. *Kyushu Journal of Mathematics* , 93-102.

Developers, T. S. (2020, January). *Sagemath*. Retrieved May 5, 2021, from Sagemath, the Sage Mathematics Sofware System (Version 9.0): https://www.sagemath.org/

Hamid, N. 2016. The Terwilliger Algebras of Some Group Association Schemes. *Thesis*. Kanazawa University, Jepang

Hamid, N., & Oura, M. (2019). Terwilliger Algebras of Some Group Association Schemes. *Mathematical Journal of Okayama University* , 199-204.

Jose Maria P. Balmaceda, M. O. (1994). The Terwilliger Algebras Of The Group Association Schemes Of S5 dan A5. *Kyushu Jurnal of Mathematics* , 221-231.

Martin, W. J., & Tanaka, H. (2009). Commutative association schemes. *European Journal of Combinatorics* , 1947-1525.

P. Balmaceda, J. M., & Oura, M. (1994). The Terwilliger Algebras of The Group Association Schemes Of S5 and A5. *Kyushu Journal of Mathematics* , 221-231.