

## ANALISIS DINAMIK MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON MICHAELIS MENTEN DAN PEMANENAN

Kridha Pusawidjayanti<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Malang

Email: [kridha.pusawidjayanti.fmipa@um.ac.id](mailto:kridha.pusawidjayanti.fmipa@um.ac.id)

\*Corresponding Author

### Abstract

*The Predator-Prey model is an interesting study because it involves an ecosystem of two species that can provide benefits to human life. The purpose of this study was to determine the stability at the equilibrium points of the predator-prey model and the response function of Michaelis Menten and harvesting. This research method is a literature collection method that begins with the construction of the model, finds the equilibrium points, gets stability at the equilibrium points, then confirms the analytical result using numerical simulations. The predator-prey model with harvest assumptions and Michaelis Menten's response function gets three equilibrium points, namely  $E_1$ ,  $E_2$ , and  $E_3$ .  $E_1$  and  $E_2$  are asymptotically stable under certain conditions, while  $E_3$  is unstable.*

**Keywords:** Numerical simulation, predator prey model, Michaelis Menten's.

Submitted: 9 April 2021; Revised: 3 Mei 2021; Accepted Publication: 11 Juni 2021;

Publishd Online: July 2021

DOI: 10.17977/um055v2i2p1-6

### PENDAHULUAN

Model mangsa-pemangsa merupakan cabang ilmu yang mempelajari tentang interaksi makhluk hidup sehingga dapat diketahui keberlanjutan populasinya dengan menggunakan sistem dinamik. Model mangsa pemangsa ini berawal dari model Lotka Volterra

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + ex)\end{aligned}\quad (1)$$

Dimana  $x, y$  adalah populasi mangsa dan populasi pemangsa,  $a$  dan  $e$  secara berturut-turut adalah laju pertumbuhan mangsa dan pemangsa sedangkan  $b$  dan  $c$  adalah laju predasi dan kematian alami pemangsa. Asumsi dasar dari model ini adalah pertumbuhan populasi mangsa akan bertumbuh atau mati alami secara eksponensial. (Jaume dan Dongmei, 2014) mengasumsikan bahwa mangsa mampu reproduksi dan regenerasi secara logistic dan mampu bertahan hidup dengan adanya pemangsa. Model logistic merupakan model pertumbuhan populasi yang mempertimbangkan daya dukung lingkungannya, hal ini mengakibatkan laju pertumbuhan tergantung pada kerapatan populasi. Pada artikel (Didiharyono, 2016) model logistic ditunjukkan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (2)$$

Konstanta  $r$  adalah laju pertumbuhan populasi mangsa, sedangkan  $K$  adalah daya dukung lingkungan, sehingga untuk populasi yang besar jumlah kematian lebih besar daripada jumlah kelahiran (Didiharyono, 2016). Sumber daya lingkungan menghambat pertumbuhan setiap populasi, jika kepadatan penduduk meningkat maka pertumbuhan populasi berkurang, untuk

itu perlu adanya daya dukung lingkungan sebagai pembawa kapasitas daya dukung lingkungan (Fira *dkk*, 2015). Menurut (Xiangming dan Zhihua, 2017) fungsional respon Michaelis Menten atau Holling type II merupakan fungsi respon pemangsaan terhadap perubahan kepadatan mangsa yang secara umum menunjukkan beberapa efek saturasi.

Populasi mangsa atau pemangsa yang dipanen dapat memberikan manfaat bagi manusia. Manusia dapat memanen populasi mangsa ini untuk situasi tertentu, tetapi hal ini membuat populasi mangsa berkurang karena pemanenan. Menurut (Oryza dan Mardlijah, 2019) pemanenan yang berlebihan mengakibatkan kelangkaan dan kepunahan suatu populasi. (K. Pusawidjayanti *dkk*, 2015) mengatakan dengan pemanenan pemangsa dapat mempertahankan keberadaan semua populasi.

Tujuan penulis mengkaji terkait analisis dinamik model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Michaelis Menten untuk mengetahui titik kesetimbangan, dan simulasi numerik dari model tersebut. Pada artikel ini akan dibahas dalam beberapa sesi, sesi pertama yaitu tentang kontruksi model, sesi kedua tentang titik equilibrium, sesi ketiga analisis kestabilan pada setiap titik equilibrium, sesi ke keempat yaitu simulasi numerik dengan menggunakan software Matlab.

## METODE

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka yang diawali dengan kontruksi model kemudian penyelesaiannya terdiri dari menentukan titik equilibrium, melinierisasi model, menganalisis kestabilan titik equilibrium, selanjutnya melakukan simulasi numerik untuk mengkonfirmasi hasil analitik. Simulasi numerik ini menggunakan software Matlab.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini akan membahas tentang model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Michaelis Menten dan pemanenan diberikan pada model berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{mxy}{1 + px} - qx \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{cmxy}{1 + px} - by\end{aligned}\quad (3)$$

Dimana  $x(t)$  dan  $y(t)$  adalah populasi mangsa dan pemangsa pada saat waktu  $t$ .  $r$ ,  $c$  adalah laju pertumbuhan intrinsik prey, pertumbuhan populasi pemangsa.  $K$  adalah daya dukung lingkungan atau *Carrying Capacity*,  $m$  laju pemangsaan,  $p$  adalah tingkat respon dari prey saat ingin di mangsa,  $q$  adalah pemanenan prey dan  $b$  adalah kematian alami pemangsa.

Titik equilibrium  $E(x, y)$  model (3) diperoleh dengan menyelesaikan  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan

$\frac{dy}{dt} = 0$ , berdasarkan model (3) diperoleh tiga titik equilibrium, yaitu:

1.  $E_1(0,0)$ , titik ekuilibrium pertama ini merupakan kondisi populasi mangsa dan pemangsa punah
2.  $E_2(x_2, 0)$ , dimana  $x_2 = K \left(1 - \frac{q}{r}\right)$ , titik equilibrium kedua ini merupakan kondisi populasi pemangsa punah.

3.  $E_3(x_3, y_3)$ , dimana  $x_3 = \frac{b}{cm-bp}$  dan  $y = \frac{(1+px_3)(q-r(1-\frac{x_3}{K}))}{m}$ , titik ekuilibrium ketiga ini merupakan kondisi kedua populasi tersebut *coexistent*.

Kestabilan dari titik ekuilibrium dapat diperoleh dari melinierisasi model (3), sehingga mendapatkan matriks jacobian pada titik ekuilibrium  $E^*(x^*, y^*)$  sebagai berikut:

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{K} - q - \frac{my}{(1+px)^2} & -\frac{mx}{1+px} \\ \frac{cmy}{(1+px)^2} & \frac{cmx}{1+px} - b \end{bmatrix} \tag{4}$$

Titik ekuilibrium  $E^*$  akan stabil asimtotik (lokal) jika bagian real dari nilai eigen bernilai negatif. Berikut ini ringkasan mengenai kestabilan pada setiap titik ekuilibrium yang telah ditemukan:

- a. Matriks Jacobian dari model (3) pada titik ekuilibrium pertama  $E_1(0,0)$  yaitu

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} r - q & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \tag{5}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen nya  $\lambda_1 = r - q$  dan  $\lambda_2 = -b$ , hasil tersebut menunjukkan titik ekuilibrium trivial stabil dengan syarat  $r < q$ .

- b. Matriks Jacobian dari model (3) pada titik ekuilibrium kedua  $E_2$  yaitu

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} r - 2r\left(1 - \frac{q}{r}\right) - q & -\frac{mK\left(1 - \frac{q}{r}\right)}{1 + pK\left(1 - \frac{q}{r}\right)} \\ 0 & \frac{cmK\left(1 - \frac{q}{r}\right)}{1 + pK\left(1 - \frac{q}{r}\right)} - b \end{bmatrix} \tag{6}$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya adalah  $\lambda_1 = -r - 3q$  dan  $\lambda_2 = \frac{cmK\left(1 - \frac{q}{r}\right)}{1 + pK\left(1 - \frac{q}{r}\right)} - b$ ,

hasil tersebut menunjukkan bahwa titik equilibrium pemangsa punah adalah stabil dengan syarat  $q > -\frac{r}{3}$  dan  $q > r\left(1 - \frac{b}{K(cm-bp)}\right)$ .

- c. Untuk mengetahui kestabilan pada titik ekuilibrium populasi semua exist adalah dengan menunjukkan matriks Jacobial dari model (3) adalah sebagai berikut:

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx_3}{K} - q - \frac{my_3}{(1+px_3)^2} & -\frac{b}{c} \\ \frac{cmy_3}{(1+bx_3)^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Sehingga didapatkan  $\lambda^2 + (-A)\lambda + (-BC)$  dimana

$$A = r - \frac{2rx_3}{K} - q - \frac{my_3}{(1+px_3)^2}$$

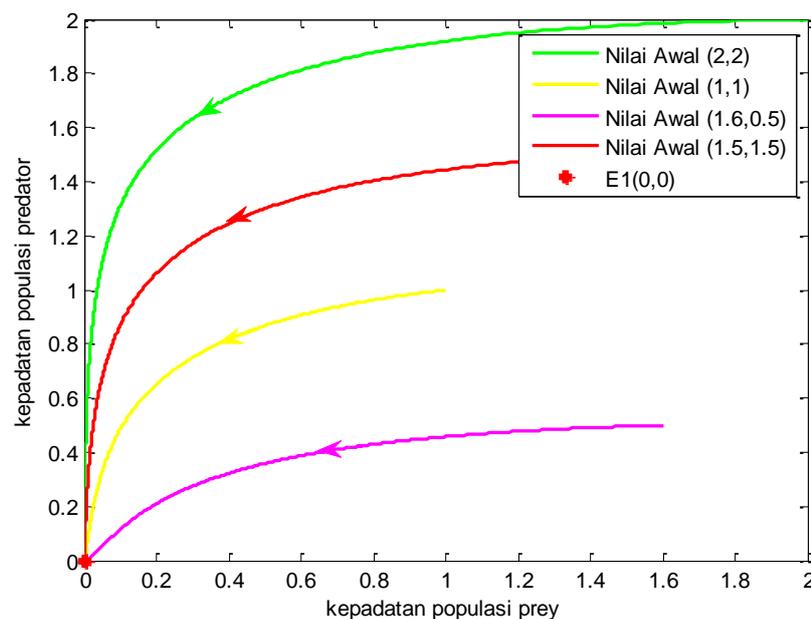
$$B = -\frac{b}{c}$$

$$C = \frac{cmy_3}{(1+bx_3)^2}$$

Menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dari polynomial  $f(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0$  maka uji kestabilan dapat dinyatakan dengan  $p_0, p_1 > 0$  (Didiharyono, 2016). Karena  $p_0$  atau  $p_1$  negatif, maka  $E_3$  tidak stabil.

Untuk mengkonfirmasi hasil analitik, maka diperlukan simulasi numerik dari model (3) dengan memberikan nilai awal dan parameter yang sudah ditentukan. Simulasi ini menggunakan software matlab dan metode Runge Kutta Orde 4.

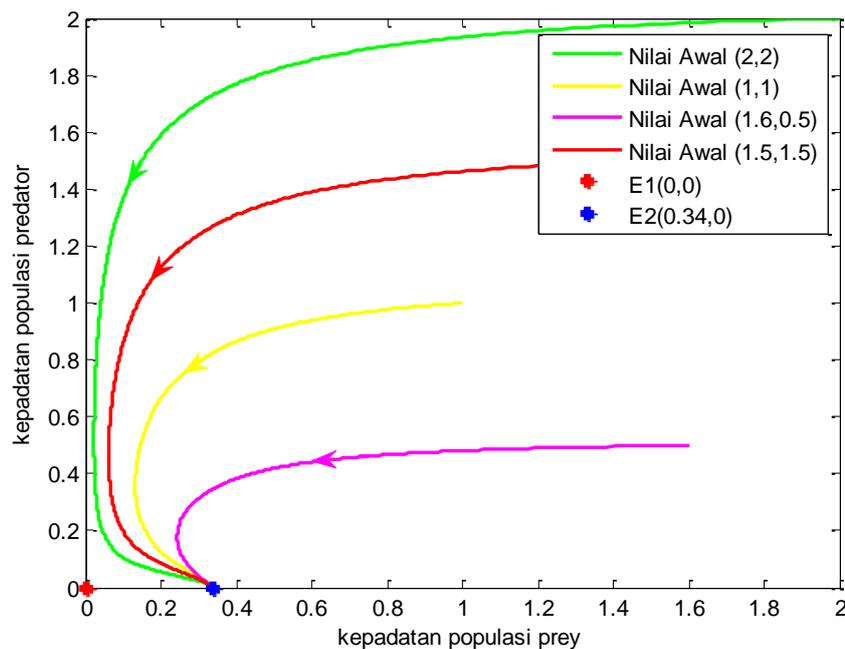
**Kasus 1.** Diberikan nilai parameter  $r = 0.01$ ;  $k = 0.125$ ;  $m = 0.8$ ;  $c = 0.3$ ;  $p = 0.1$ ;  $b = 0.2$ ;  $q = 0.2$ . Dengan nilai awal yang berbeda didapatkan potret fase sesuai gambar 1.



Gambar 1. Solusi Numerik dari model (3) dengan parameter kasus 1

Terlihat bahwa titik ekuilibrium yang exist hanyalah  $E_1$ , dengan empat nilai awal yang berbeda gambar dari solusi model (3) konvergen ke  $E_1$  hal ini sudah di jelaskan bahwa titik ekuilibrium  $E_1$  akan stabil dengan syarat  $r < q$ .

**Kasus 2.** Diberikan nilai parameter  $r = 0.8$ ;  $k = 0.5$ ;  $m = 0.98$ ;  $c = 0.24$ ;  $p = 0.51$ ;  $b = 0.13$ ;  $q = 0.256$ . Dengan memberikan nilai awal yang berbeda di dapatkan solusi numerik model (3) sesuai dengan gambar 2 berikut:



Gambar 2. Solusi Numerik dari model (3) dengan parameter kasus 2

Terdapat dua titik ekuilibrium yang *exist* yaitu  $E_1(0,0)$  dan  $E_2(0.34; 0)$  tetapi pada gambar 2  $E_1$  tidak stabil sedangkan  $E_2$  stabil sesuai dengan syarat yang ada pada hasil analitik. Pada gambar 2 menunjukkan bahwa solusi numerik dari model (3) konvergen ke  $E_2$ .

## PENUTUP

Pada artikel ini telah dibahas mengenai analisis dinamik model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Michaelis Menten dan pemanenan. Terdapat tiga titik ekuilibrium yaitu titik equilibrium trivial dan titik ekuilibrium pemangsa punah yang kedua nya stabil asimtotik dengan beberapa syarat tertentu, sedangkan titik ekuilibrium *co-exist* nya tidak stabil. Simulasi numerik telah diberikan dengan mengkonfirmasi hasil analitik. Untuk artikel selanjutnya bisa menambahkan beberapa asumsi, sebagai contoh dengan memberikan tambahan *time-delay* saat memangsa untuk mengetahui perubahan dinamika populasi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Didiharyono. 2016. *Analisis Kestabilan dan Keuntungan Maksimum Model Predator-Prey Fungsi Respon Tipe Holling III dengan Usaha Pemanenan*. Jurnal Masagena, Volume 11 nomor 2
- Fira Fitriah, Agus Suryanto, Noor Hidayat. 2015. *Numerical Study of Predator-Prey Model with Beddington-DeAngelis Functional Response and Prey Harvesting*. The Journal of Tropical Life Science. Vol 5 no. 2 pp. 105-109.
- Jaume LLIBRE and Dongmei Xiao. 2014. *Global Dynamics of A Lotka-Volterra Model With Two Predators Competing For One Prey*. SIAM J. Appl. Math. Vol. 74(2), 434-453.

- K. Pusawidjayanti, A. Suryanto and R.B.E. Wibowo. 2015. *Dynamics of a Predator-Prey Model Incorporating Prey Refuge, Predator Infection and Harvesting*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 9 no. 76, 3751-3760
- Oryza Safitri dan Mardlijah. 2019. *Kontrol Optimum pada Model Prey-Predator dengan Pemanenan pada Ikan Prey dan Ikan Predator*. Limits Journal of Mathematics and Its Applications. Vol 16, 39-49.
- Syamsuddin Toaha. 2012. Analisis Kestabilan Model Logistik Satu Populasi dengan Tundaan Waktu. Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi. Vol 8 no. 2, 131-138
- Xiangming Zhang and Zhihua Liu. 2017. Hopf bifurcation of the Michaelis-Menten type ratio-dependent predator-prey model with age structure. People Republic of China, 100875.