JKMA
Jurnal Kajian Matematika dan Aplikasinya
VOLUME 3 NOMOR 2, July 2022
e-ISSN: 2722-7650. http://journal2.um.ac.id/index.php/jkma

BENTUK CAYLEY COLOR DIGRAPH GRUP SIKLIK G DENGAN ORDER $n < 15$

M. Ariq Zainurrifqi[1], Mohammad Agung[1,*], Indriati Nurul Hidayah[1]
[1] Universitas Negeri Malang

Email : m.ariq.1803126@students.um.ac.id (*M.A. Zainurriqi)*, mohammad.agung.fmipa@um.ac.id (*M. Agung)*, indriati.nurul.fmipa@um.ac.id *(I.N. Hidayah)*
*Corresponding Author

Abstract
Let G be a cyclic group with set of generators Δ. Let $x_i \in \Delta$, a Cayley color digraph of G with color x_i is a digraph with vertices elements of G and there is an arrow from p to q if $q = x_i p$. In this artcle, we find the Cayley color digraph of a cylic group of order $n < 15$. We also proved the existence of Hamiltonian cycle of the graph.

Keywords: *Cayley color digraph, cyclic group, Hamiltonian cycle*

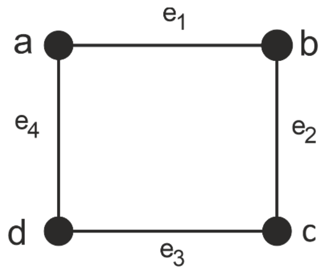
Submitted: 2 March 2022; Revised: 20 June 2022; Accepted Publication: 15 July 2022;
Published Online: July 2022
DOI: 10.17977/um055v3i2p1-14

PENDAHULUAN

Teori Aljabar dan teori Graf adalah teori Matematika yang sampai saat ini masih banyak dikembangkan oleh para ilmuwan. Banyak hal dari kedua teori tersebut yang bisa diteliti terkait korelasinya. Menurut Jalil (2011), Cayley Color Digraph dari grup siklik Z_n dengan n merupakan bilangan prima membentuk digraf yang memuat sikel Hamilton. Penelitian yang dilakukan Jalil (2011) menunjukkan bahwa Cayley Color Digraph dari grup siklik Z_n dengan n berorder 2, 3, 5, 7 membentuk suatu digraf yang memuat sikel Hamilton. Penelitian yang dilakukan oleh Jalil (2011) hanya sebatas memakai beberapa contoh bilangan prima.

Grup merupakan salah satu teori dalam Aljabar yang sampai saat ini masih banyak dikembangkan oleh para peneliti. Suatu grup adalah himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner *, sedemikian hingga berlaku sifat tertutup, asosiatif, terdapat elemen identitas dan setiap elemen memiliki invers (Gilbert, 2014). Contohnya adalah grup Z_5 dengan operasi penjumlahan pada modulo 5 $(Z_5, +)$. Grup Z_5 memiliki anggota berupa himpunan $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Grup Z_5 bersifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas dan juga setiap elemen dari Z_5 memiliki invers.

Graf G terdiri dari himpunan elemen – elemen yang disebut titik, dinotasikan dengan $V(G)$, dan himpunan elemen – elemen yang disebut sisi, dinotasikan dengan $E(G)$. Setiap sisi menghubungkan dua titik (Aldous & Wilson, 2003). Sebagai contoh jika ada graf G dengan himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dimana e_1 merupakan sisi yang menghubungkan titik a dan b, e_2 merupakan sisi yang menghubungkan titik b dan c, e_3 merupakan sisi yang menghubungkan titik c dan d, dan e_4 merupakan sisi yang menghubungkan titik d dan a. Ilustrasi dari graf G dapat dilihat dari Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Contoh graf

Digraf merupakan graf yang sisinya memiliki arah tetentu. Digraf berisi himpunan elemen titik yang disebut *Vertices* dan himpunan busur yang disebut *Arcs*. Setiap busur menghubungkan dua titik dengan arah yang spesifik (Aldous & Wilson, 2003).

Suatu elemen a dari grup G disebut generator dari G jika $G = \langle a \rangle$ (Gillbert, 2014). Himpunan dari generator dapat dinotasikan dengan $\Delta = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Contoh generator dari Z_5 adalah $1, 2, 3, 4$. Jadi himpunan generator dari Z_5 adalah $\Delta = \{1,2,3,4\}$.

Elemen – elemen dari Z_5 dapat dianggap untuk menjadi titik pada graf, sehingga didapat graf dengan himpunan titik $V(G) = Z_5$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $V = V(G) = Z_5$. Pernyataan ini berlaku juga untuk Z_n. Jadi, elemen – elemen dari suatu grup Z_n dapat dijadikan sebagai titik dalam graf yang dapat dinotasikan dengan $V = V(G) = Z_n$. Himpunan titik tersebut kemudian dihubungkan oleh sisi – sisi yang tebentuk dengan notasi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Graf yang terbentuk dari hubungan antara grup Z_5 dengan generatornya Δ bisa disebut dengan Cayley Color Graph $D_\Delta(Z_5)$ (Chartrand dkk., 2016). Himpunan generator Δ yang didapat dari grup Z_5 dapat dijadikan sebagai warna kepada sisi yang terbentuk. Jadi, dari grup Z_5 tersebut dapat dijadikan suatu graf dengan himpunan titik $V(G) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Pada Z_5 terdapat generator $1 \in \Delta$. Generator tersebut dapat dijadikan warna dari sisi jika terdapat operasi $0 = 1 + 4$ yang menunjukkan bahwa terdapat sisi berwarna 1 dari titik 4 ke titik 0. Oleh karena itu, Cayley Color Graph dari grup siklik Z_5 memiliki 4 macam warna.

Seperti yang telah diketahui, Cayley Color Graph sebenarnya adalah digraf yang setiap busurnya diberi warna, di mana warna adalah generator di Δ. *Cayley Color Digraph* adalah digraf yang dibentuk dari generator $a \in G$ dan G $(\text{Chartrand dkk.}, 2016)$. Misal $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung. $\exists\, V = V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E = E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Sikel dari G adalah lintasan yang dinotasikan dengan $v_1 v_2 \dots v_n v_1$. Panjang sikel dari G adalah jumlah sisi di dalam graf G. $\ell - cycle$ adalah sikel dari G dengan panjang ℓ. Jika $\sum E(G) = |V(G)|$, maka G disebut sikel Hamilton (Liu dkk., 2018). Dari definisi diketahui bahwa sikel G disebut dengan Sikel Hamilton ketika banyak titik sama dengan banyak sisi. Oleh karena itu, tidak akan ada sisi yang menghubungkan titik yang sama (*loop*) karena akan mengakibatkan banyak titik tidak sama dengan banyak sisi.

Jalil (2011) menentukan bentuk Cayley Color Digraph dari grup siklik Z_n dengan n merupakan bilangan prima 2, 3, 5 ,7. Jalil (2011) juga menunjukkan bahwa Cayley Color Digraph yang didapat memuat sikel Hamilton dan bentuk Cayley Color Digraph dari grup siklik Z_n disebut Digraph Hamilton. Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai bentuk umum dari penelitian yang telah dilakukan oleh Jalil (2011) dengan menggunakan order yang lebih tinggi. Penelitian ini akan menentukan bentuk dan Cayley Color Digraph dari grup siklik $G = \langle x \rangle$ berorder n dengan $n < 15$ serta menunjukkan bahwa Cayley Color Digraph yang didapat memuat sikel Hamilton.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah literature review yang melalui tahapan – tahapan sebagai berikut :

1. Pengambilan sampel grup siklik G
   Pada tahap ini dilakukan pengambilan sampel grup siklik G yang memiilki order $n < 15$.
2. Mengidentifikasi generator dari grup tersebut
   Pada tahap ini dilakukan identifikasi terhadap generator dari grup siklik tersebut. Generator ini akan menjadi warna dalam digraf.
3. Membentuk digraf.
   Pada tahap ini dibentuk digraf dengan himpunan sisinya adalah generator dari grup siklik tersebut.
4. Pembuktian hasil

HASIL DAN PEMBAHASAN

Suatu grup G disebut grup siklik jika ada a di G sedemikian sehingga $G = \{a^n | n \in Z\}$, a disebut generator dari G (Gallian, 2017). Grup siklik G berorder n dengan generator x dapat dinotasikan dengan $G_n = \langle x \rangle = \{x^0, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ dan jika $h_1, h_2, \dots, h_k$ adalah generator – generator dari G maka himpunan generator G dapat ditulis sebagai $\Delta = \{h_1, h_2, .., h_k\}$.

Sebagai contoh, suatu grup siklik G dengan generator x berorder 3 dapat dituliskan sebagai $G_3 = \langle x \rangle = \{1, x, x^2\}$ dengan 1 merupakan identitas dari G. Grup siklik G_3 memiliki generator lain yang memenuhi definisi $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Untuk menentukan semua generator dari grup sikllik G_3, dapat dilakukan hal sebagai berikut:

Untuk yang pertama, lakukan pengecekan terhadap elemen $1 \in G_3$

$1^0 = 1$
$1^1 = 1$
$1^2 = 1$

Berdasarkan pengecekan di atas 1 bukan merupakan generator dari grup siklik G_3 karena $\langle 1 \rangle \neq G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Selanjutnya untuk yang kedua, lakukan pengecekan terhadap elemen $x \in G_3$

$x^0 = 1$
$x^1 = x$
$x^2 = x^2$

Berdasarkan pengecekan di atas x merupakan generator dari grup siklik G_3 karena $\langle x \rangle = G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Langkah terakhir yaitu melakukan pengecekan terhadap elemen terakhir yaitu $x^2 \in G_3$

$(x^2)^0 = 1$
$(x^2)^1 = x^2$
$(x^2)^2 = x^4 = x$

Berdasarkan pengecekan di atas x^2 merupakan generator dari grup siklik G_3 karena $\langle x^2 \rangle = G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$.
Jadi, himpunan generator dari grup siklik G_3 adalah $\Delta = \{x, x^2\}$.

Untuk memudahkan identifikasi generator dari grup siklik, bisa menggunakan corollary dari teorema 1 sebagai berikut.

Teorema 1 (Gallian, 2017)
Misalkan a adalah elemen berorder n dalam grup dan misalkan k bilangan bulat positif, maka $\langle a^k \rangle = \langle a^{\gcd(n,k)} \rangle$ dan $|a^k| = n/\gcd(n,k)$.

Corollary 2

Generator dari G adalah ketika $|x| = n$, maka $\langle x \rangle = \langle x^j \rangle$ jika dan hanya jika $\gcd(n, j) = 1$ dan $|x| = |\langle a^j \rangle|$ jika dan hanya jika $\gcd(n, j) = 1$.

Untuk G_3 dengan menggunakan corollary 2 mudah ditunjukkan bahwa himpunan generator dari G_3 adalah $\Delta = \{x, x^2\}$. Dalam kaitannya dengan graf, generator dari grup siklik G dapat berfungsi sebagai warna sisi dari digraf G.

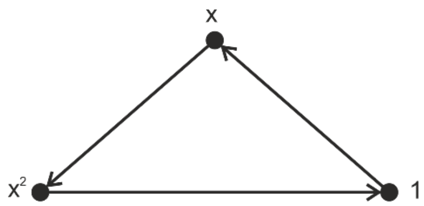
Pewarnaan sisi dengan warna x dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^2 ke 1

$x = x * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari 1 ke x

$x^2 = x * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x ke x^2

Digraf dengan pewarnaan $x \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 2 berikut:



Gambar 2. Cayley color digraph $D_\Delta(G_3)$ dengan warna x

Gambar 2 tersebut mengilustrasikan hubungan antara digraf dengan $G_3 = \{1, x, x^2\}$ dan $x \in \Delta$ dapat membentuk Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_3)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_3 = \{1, x, x^2\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}$, $x^j, x^k \in G_3$ yang berwarna x. Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_3)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_3$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$.

Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_3)) = |V(D_\Delta(G_3))| = 3$ maka menurut pernyataan Liu (2018) cayley color digraph dari G_3 memuat sikel Hamilton.

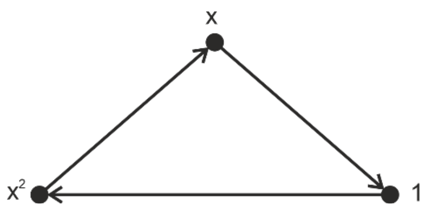
Pewarnaan sisi dengan warna x^2 dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x^2 * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^2 dari x ke 1

$x = x^2 * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^2 dari x^2 ke x

$x^2 = x^2 * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^2 dari 1 ke x^2

Digraf dengan pewarnaan $x^2 \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 5 berikut:



Gambar 3. Cayley color digraph $D_\Delta(G_3)$ dengan warna x^2

Gambar 3 tersebut mengilustrasikan, hubungan antara digraf dengan $G_3 = \{1, x, x^2\}$ dan $x^2 \in \Delta$ dapat membentuk Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_3)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_3 = \{1, x, x^2\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}$, $x^j, x^k \in G_3$ yang berwarna x^2. Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_3)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_3$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$. Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_3)) = |V(D_\Delta(G_3))| = 3$ maka menurut pernyataan Liu (2018) cayley color digraph dari G_3 memuat sikel Hamilton.

Penelitian tentang Cayley Color Digraph dari grup siklik oleh Jalil (2011) menunjukkan bahwa Cayley Color Digraph dari grup siklik dengan generator x yang berorder $2 < n < 7$ dengan n prima memuat sikel Hamilton. Karena penelitian milik Jalil (2011) hanya menggunakan order prima dan kurang dari 7, maka penelitian ini dilakukan untuk melengkapi pembuktian dari penelitian milik Jalil (2011). Bentuk Cayley Color Digraph dari grup siklik dengan order $2 < n < 7$ telah dibuktikan, maka teorema berikut dapat berlaku untuk membuktikan Bentuk Cayley Color Digraph dari grup siklik dengan order $n < 15$.

Teorema 3

Jika G adalah grup siklik dengan order $n < 15$, maka *cayley color digraph* dari G memuat sikel Hamilton.

Bukti :

Untuk pembuktian dengan $2 < n < 7$, n adalah bilangan prima telah terbukti memuat sikel Hamilton (Jalil, 2011). Maka untuk order selanjutnya bisa dilihat dari beberapa uraian berikut.

Untuk $n = 4$,

Misal $G_4 = \langle x \rangle$, $|G_4|$ = 4 adalah grup siklik dengan salah satu generatornya adalah x dengan order 4, maka $G_4 = \langle x \rangle = \{1, x, x^2, x^3\}$. Dengan menggunakan corollary 4.2, himpunan generator dari G_4 adalah Δ=$\{x,\ x^3\}$. Operasi pada grup siklik G_4 dapat dilihat dari tabel 1 berikut:

Tabel 1. Tabel cayley grup G_4

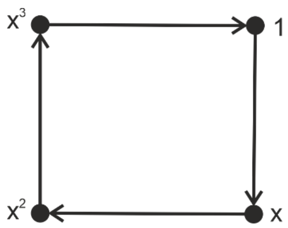
*	**1**	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x^3}$
1	1	x	x^2	x^3
$\boldsymbol{x}$	x	x^2	x^3	1
$\boldsymbol{x^2}$	x^2	x^3	1	x
$\boldsymbol{x^3}$	x^3	1	x	x^2

Sisi – sisi yang akan terbentuk dari adanya generator tersebut dapat dilihat dari uraian sebagai berikut:

Pewarnaan sisi dengan warna x dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x * x^3$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^3 ke 1
$x = x * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari 1 ke x
$x^2 = x * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x ke x^2
$x^3 = x * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^2 ke x^3

Dari uraian tersebut, dapat dilihat bahwa generator x dapat membentuk suatu sisi berarah dari dua titik yang bersesuaian. Pernyataan tersebut menunjukkan bahwa dari pembentukan sisi berarah oleh generator didapat suatu digraf dengan warna sisi x. Digraf dengan pewarnaan $x \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 4 berikut:



Gambar 4. Cayley color digraph $D_\Delta(G_4)$ dengan warna x

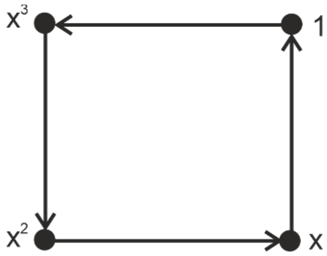
Gambar 4 tersebut mengilustrasikan bahwa grup $G_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$ dan $x \in \Delta$ yang bersesuaian dengan Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_4)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}$, $x^j, x^k \in G_4$ yang berwarna x.

Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_4)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_4$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$. Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_4)) =$

$|V(D_\Delta(G_4))| = 4$ maka menurut pernyataan Liu (2018) Cayley Color Digraph dari G_4 memuat sikel Hamilton.
Pewarnaan sisi dengan warna x^3 dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x^3 * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x ke 1
$x = x^3 * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x^2 ke x
$x^2 = x^3 * x^3$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x^3 ke x^2
$x^3 = x^3 * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari 1 ke x^3

Digraf dengan pewarnaan $x^3 \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 5 berikut:



Gambar 5. Cayley color digraph $D_\Delta(G_4)$ dengan warna x^3

Gambar 5 tersebut mengilustrasikan, hubungan antara digraf dengan $G_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$ dan $x^3 \in \Delta$ dapat membentuk Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_4)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}$, $x^j, x^k \in G_4$ yang berwarna x^3.
Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_4)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_4$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$. Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_4)) = |V(D_\Delta(G_4))| = 4$ maka menurut pernyataan Liu (2018) Cayley Color Digraph dari G_4 memuat sikel Hamilton.

Untuk $n = 6$,

Misal $G_6 = \langle x \rangle$, $|G_6| = 6$ adalah grup siklik dengan salah satu generatornya adalah x dengan order 6, maka $G_6 = \langle x \rangle = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. Dengan menggunakan corollary 4.2, himpunan generator dari G_6 adalah $\Delta = \{x, x^5\}$. Operasi pada grup siklik G_6 dapat dilihat dari tabel 2 berikut:

Tabel 2. Tabel cayley grup G_6

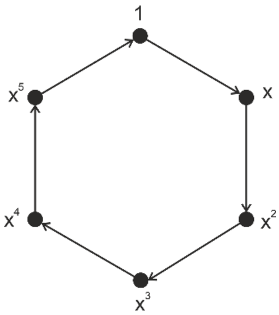
*	**1**	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x^3}$	$\boldsymbol{x^4}$	$\boldsymbol{x^5}$
1	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5
$\boldsymbol{x}$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	1
$\boldsymbol{x^2}$	x^2	x^3	x^4	x^5	1	x
$\boldsymbol{x^3}$	x^3	x^4	x^5	1	x	x^2
$\boldsymbol{x^4}$	x^4	x^5	1	x	x^2	x^3
$\boldsymbol{x^5}$	x^5	1	x	x^2	x^3	x^4

Sisi – sisi yang akan terbentuk dari adanya generator tersebut dapat dilihat dari uraian sebagai berikut:
Pewarnaan sisi dengan warna x dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x * x^5$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^5 ke 1
$x = x * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari 1 ke x
$x^2 = x * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x ke x^2
$x^3 = x * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^2 ke x^3
$x^4 = x * x^3$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^3 ke x^4

$x^5 = x * x^4$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^4 ke x^5

Digraf dengan pewarnaan $x \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 6 berikut:



Gambar 6. Cayley color digraph $D_\Delta(G_6)$ dengan warna x

Gambar 6 tersebut mengilustrasikan, hubungan antara digraf dengan $G_6 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ dan $x \in \Delta$ dapat membentuk Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_6)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_6 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}$, $x^j, x^k \in G_6$ yang berwarna x.

Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_6)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_6$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$. Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_6)) = |V(D_\Delta(G_6))| = 6$ maka menurut pernyataan Liu (2018) Cayley Color Digraph dari G_6 memuat sikel Hamilton.

Pewarnaan sisi dengan warna x^5 dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x^5 * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x ke 1

$x = x^5 * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^2 ke x

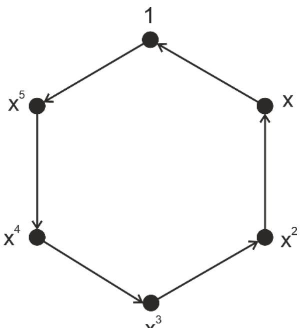
$x^2 = x^5 * x^3$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^3 ke x^2

$x^3 = x^5 * x^4$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^4 ke x^3

$x^4 = x^5 * x^5$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^5 ke x^4

$x^5 = x^5 * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari 1 ke x^5

Digraf dengan pewarnaan $x^5 \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 7 berikut:



Gambar 7. Cayley color digraph $D_\Delta(G_6)$ dengan warna x^5

Gambar 7 tersebut mengilustrasikan, hubungan antara digraf dengan $G_6 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ dan $x^5 \in \Delta$ dapat membentuk Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_6)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_6 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}$, $x^j, x^k \in G_6$ yang berwarna x^5.

Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_6)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_6$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$. Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_6)) = |V(D_\Delta(G_6))| = 6$ maka menurut pernyataan Liu (2018) Cayley Color Digraph dari G_6 memuat sikel Hamilton.

Untuk $n = 8$,
Misal $G_8 = \langle x \rangle$, $|G_8| = 8$ adalah grup siklik dengan salah satu generatornya adalah x dengan order 8, maka $G = \langle x \rangle = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Dengan menggunakan corollary 4.2, himpunan generator dari G_8 adalah $\Delta = \{x, x^3, x^5, x^7\}$. Operasi pada grup siklik G_8 dapat dilihat dari tabel 3 berikut:

Tabel 3. Tabel cayley grup G_8

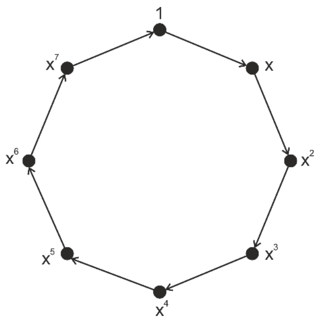
*	**1**	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	1
x^2	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	1	x
x^3	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	1	x	x^2
x^4	x^4	x^5	x^6	x^7	1	x	x^2	x^3
x^5	x^5	x^6	x^7	1	x	x^2	x^3	x^4
x^6	x^6	x^7	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5
x^7	x^7	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6

Sisi – sisi yang akan terbentuk dari adanya generator tersebut dapat dilihat dari uraian sebagai berikut:

Pewarnaan sisi dengan warna x dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x * x^7$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^7 ke 1
$x = x * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari 1 ke x
$x^2 = x * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x ke x^2
$x^3 = x * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^2 ke x^3
$x^4 = x * x^3$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^3 ke x^4
$x^5 = x * x^4$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^4 ke x^5
$x^6 = x * x^5$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^5 ke x^6
$x^7 = x * x^6$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x dari x^6 ke x^7

Digraf dengan pewarnaan $x \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 8 berikut:



Gambar 8. Cayley color digraph $D_\Delta(G_8)$ dengan warna x

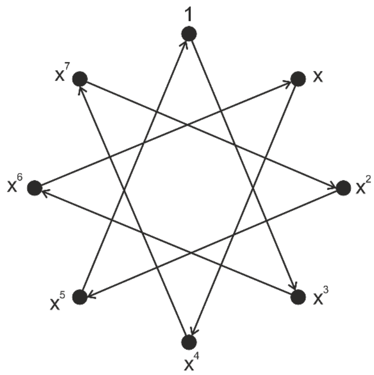
Gambar 8 tersebut mengilustrasikan, hubungan antara digraf dengan $G_8 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$ dan $x \in \Delta$ dapat membentuk Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_8)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_8 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}$, $x^j, x^k \in G_8$ yang berwarna x.

Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_8)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_8$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$. Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_8)) = |V(D_\Delta(G_8))| = 8$ maka menurut pernyataan Liu (2018) Cayley Color Digraph dari G_8 memuat sikel Hamilton.

Pewarnaan sisi dengan warna x^3 dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x^3 * x^5$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x^5 ke 1
$x = x^3 * x^6$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x^6 ke x
$x^2 = x^3 * x^7$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x^7 ke x^2
$x^3 = x^3 * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari 1 ke x^3
$x^4 = x^3 * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x ke x^4
$x^5 = x^3 * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x^2 ke x^5
$x^6 = x^3 * x^3$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x^3 ke x^6
$x^7 = x^3 * x^4$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^3 dari x^4 ke x^7

Digraf dengan pewarnaan $x^3 \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 9 berikut:



Gambar 9. Cayley color digraph $D_\Delta(G_8)$ dengan warna x^3

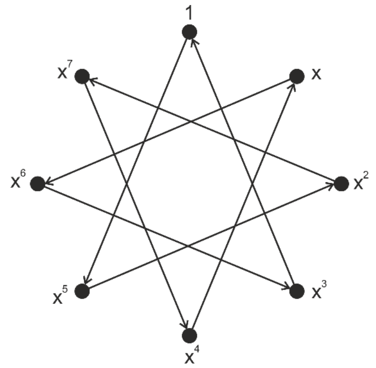
Gambar 9 tersebut mengilustrasikan, hubungan antara digraf dengan $G_8 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$ dan $x^3 \in \Delta$ dapat membentuk Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_8)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_8 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}, x^j, x^k \in G_8$ yang berwarna x^3.

Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_8)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_8$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$. Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_8)) = |V(D_\Delta(G_8))| = 8$ maka menurut pernyataan Liu (2018) Cayley Color Digraph dari G_8 memuat sikel Hamilton.

Pewarnaan sisi dengan warna x^5 dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x^5 * x^3$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^3 ke 1
$x = x^5 * x^4$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^4 ke x
$x^2 = x^5 * x^5$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^5 ke x^2
$x^3 = x^5 * x^6$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^6 ke x^3
$x^4 = x^5 * x^7$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^7 ke x^4
$x^5 = x^5 * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari 1 ke x^5
$x^6 = x^5 * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x ke x^6
$x^7 = x^5 * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^5 dari x^2 ke x^7

Digraf dengan pewarnaan $x^5 \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 10 berikut:



Gambar 10. Cayley color digraph $D_\Delta(G_8)$ dengan warna x^5

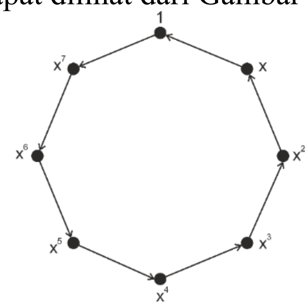
Gambar 10 tersebut mengilustrasikan, hubungan antara digraf dengan $G_8 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$ dan $x^5 \in \Delta$ dapat membentuk Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_8)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_8 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}$, $x^j, x^k \in G_8$ yang berwarna x^5.

Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_8)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_8$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$. Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_8)) = |V(D_\Delta(G_8))| = 8$ maka menurut pernyataan Liu (2018) Cayley Color Digraph dari G_8 memuat sikel Hamilton.

Pewarnaan sisi dengan warna x^7 dapat dilihat dari uraian sebagai berikut berikut,

$1 = x^7 * x$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^7 dari x ke 1
$x = x^7 * x^2$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^7 dari x^2 ke x
$x^2 = x^7 * x^3$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^7 dari x^3 ke x^2
$x^3 = x^7 * x^4$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^7 dari x^4 ke x^3
$x^4 = x^7 * x^5$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^7 dari x^5 ke x^4
$x^5 = x^7 * x^6$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^7 dari x^6 ke x^5
$x^6 = x^7 * x^7$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^7 dari x^7 ke x^6
$x^7 = x^7 * 1$, menunjukkan bahwa ada sisi berwarna x^7 dari 1 ke x^7

Digraf dengan pewarnaan $x^7 \in \Delta$ dapat dilihat dari Gambar 11 berikut:



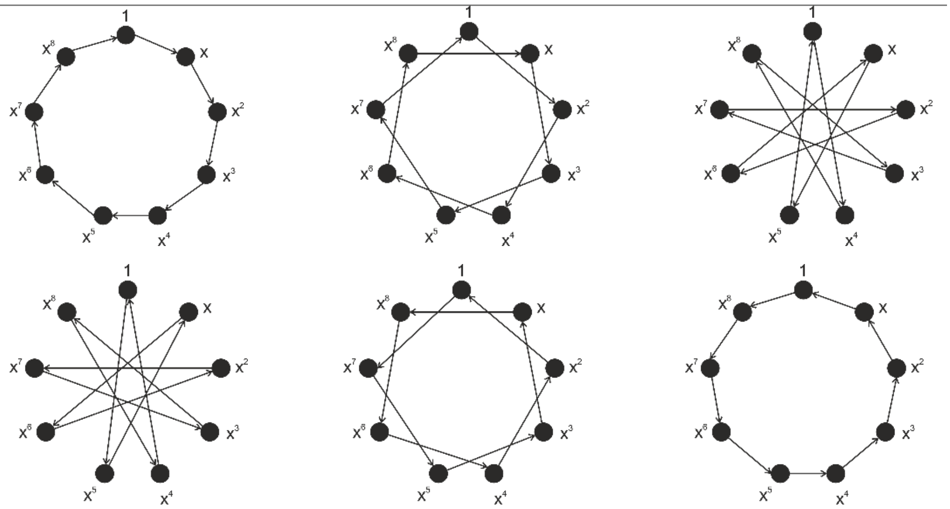
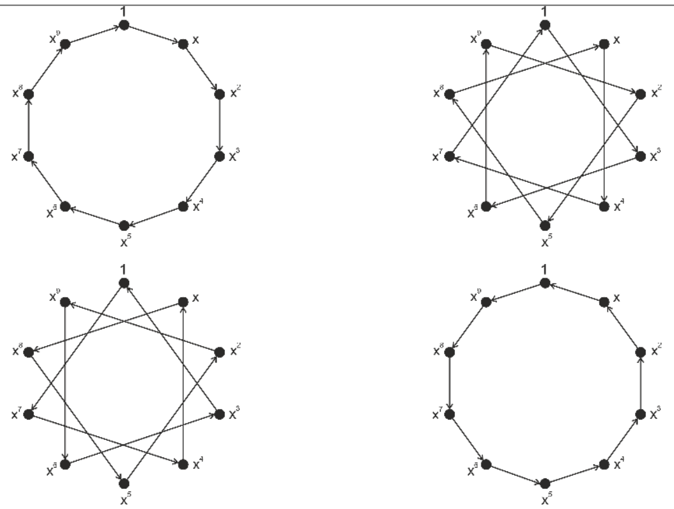
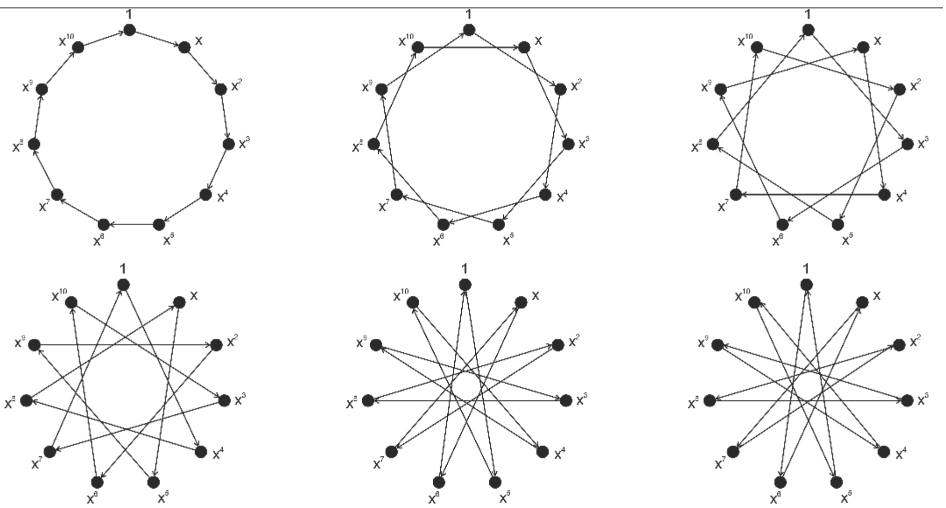
Gambar 11. Cayley color digraph $D_\Delta(G_8)$ dengan warna x^7

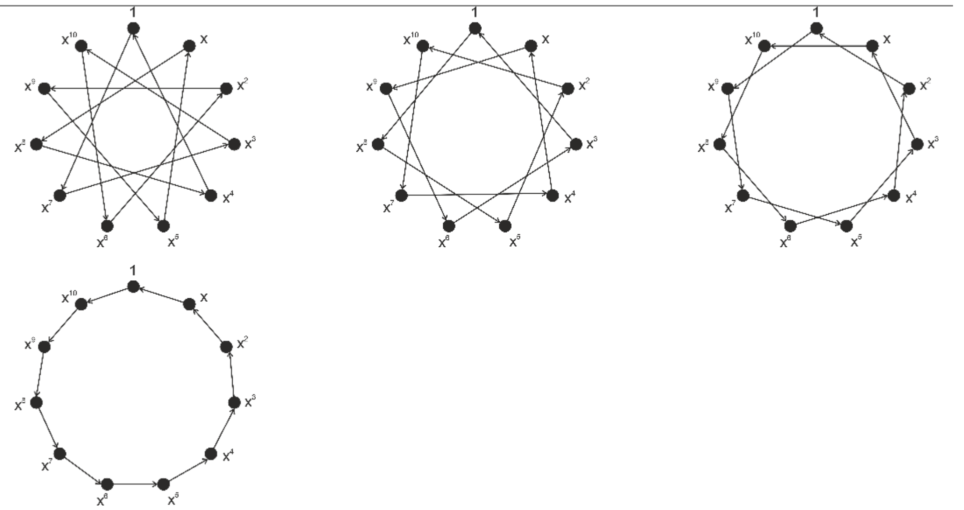
Gambar 11 tersebut mengilustrasikan, hubungan antara digraf dengan $G_8 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$ dan $x^7 \in \Delta$ dapat membentuk Cayley Color Digraph $D_\Delta(G_8)$ dengan himpunan titiknya adalah $G_8 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$ dan himpunan sisinya $\{x^j x^k\}$, $x^j, x^k \in G_8$ yang berwarna x^7.

Digraf tersebut menunjukkan bahwa sisi yang terdapat di $D_\Delta(G_8)$ melewati semua titik tepat satu kali. Namun, tidak setiap dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi, hanya dua titik yang memenuhi $x^i, x^j \in G_8$ dan $h_i \in \Delta$ sehingga $x^i = h_i * x^j$. Jadi, karena $\sum E(D_\Delta(G_8)) = |V(D_\Delta(G_8))| = 8$ maka menurut pernyataan Liu (2018) Cayley Color Digraph dari G_8 memuat sikel Hamilton.

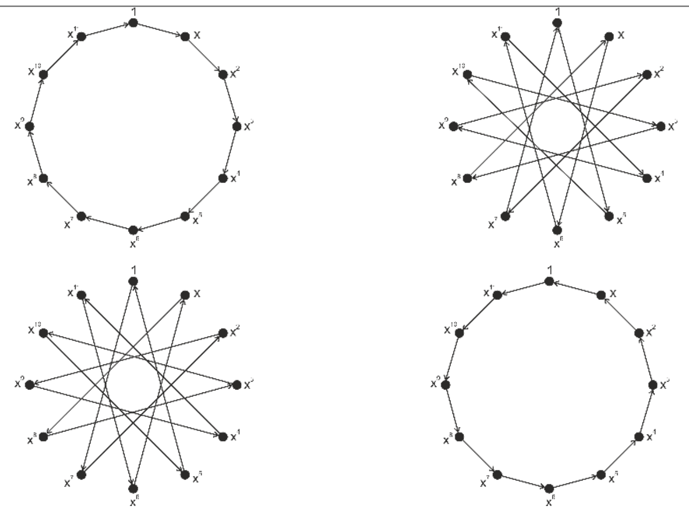
Selanjutnya untuk order $9 \leq n < 15$, dengan cara yang sama, menunjukkan bahwa setiap Cayley Color Digraph memuat sikel Hamilton. Hasil dari percobaan dengan order $9 \leq n < 15$ dapat dilihat dari tabel berikut.

Tabel 4. Cayley color digraph untuk order $9 \leq n \leq 15$

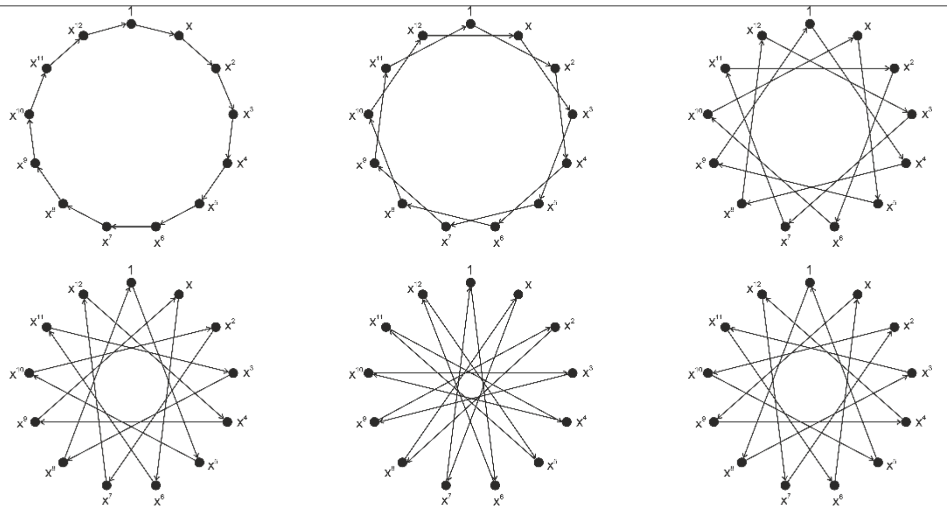
Grup Siklik	**Cayley Color Digraph**
$\boldsymbol{G_9}$	
$\boldsymbol{G_{10}}$	
$\boldsymbol{G_{11}}$	

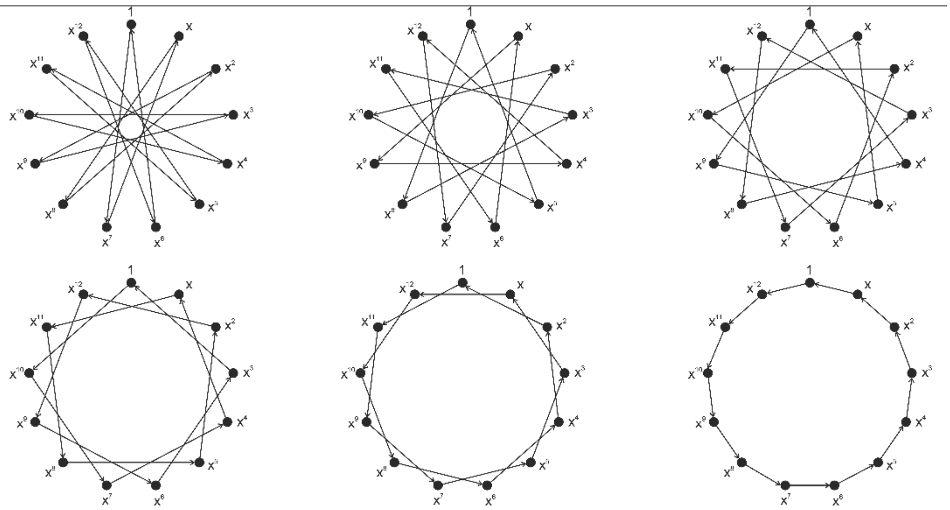


G_{12}

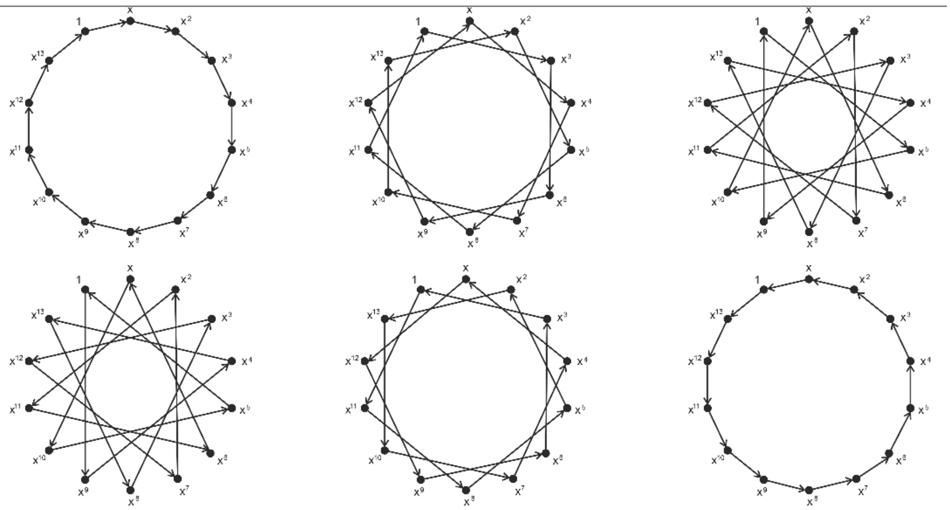


G_{13}





$\boldsymbol{G_{14}}$



Jadi, karena semua Cayley Color Digraph dari grup siklik $G = \langle x \rangle$ dengan order $n, n < 15$ memuat sikel Hamilton, maka terbukti bahwa Jika G adalah grup siklik dengan order $n < 15$, maka Cayley Color Digraph dari G memuat sikel Hamilton.

PENUTUP

Berdasarkan hasil penelitian dari Jalil (2011) sebelumnya dan dari penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa Grup Siklik $G = \langle x \rangle$ dengan order $n, n < 15$ dapat dibentuk Cayley Color Digraph dan memuat bentuk Sikel Hamilton di dalamnya. Saran untuk penelitian selanjutnya dapat ditunjukkan bentuk Cayley Color Digraph dari grup Z berpangkat atau grup lain. Selain itu, diharapkan dapat memperumum bentuk *Cayley Color Digraph* dari grup siklik.

DAFTAR RUJUKAN

Aldous, J. M., & Wilson, R. J. (2003). *Graphs and applications: An introductory approach*. Springer Science & Business Media.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *GRAPHS & DIGRAPHS: Sixth Edition*. 624.

Deogun, J. S., & Steiner, G. (1994). Polynomial Algorithms for Hamiltonian Cycle in Cocomparability Graphs. *SIAM Journal on Computing*, *23*(3), 520–552. https://doi.org/10.1137/S0097539791200375

Gallian (2017) 'CONTEMPORARY ABSTRACT ALGEBRA', p. 631.

Gilbert, L. (2014). ELEMENTS OF MODERN ALGEBRA: Eighth Edition. Cengage Learning.

Jalil, A. (2011) 'Cayley Color Digraph Dari Grup Siklik Zn Dengan n Bilangan Prima', GAMATIKA : Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika,2(1), p. 10. ISSN : 2087-6262. Available at: https://www.journal.unipdu.ac.id/index.php/gamatika/article/view/245/221.

Liu, D., Wang, C., & Wang, S. (2018). Hamilton-connectivity of Interconnection Networks Modeled by a Product of Graphs. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, *3*(2), 419–426. https://doi.org/10.21042/AMNS.2018.2.00032