JKMA Jurnal Kajian Matematika dan Aplikasinya
VOLUME 3 NOMOR 2, July 2022
e-ISSN: 2722-7650. http://journal2.um.ac.id/index.php/jkma

PELABELAN TOTAL TIDAK TERATUR TITIK GRAF *UNIDENTIFIED FLYING OBJECT*

Andi Daniah Pahrany [1*], Nurdin[2], Hasmawati[2]
[1] Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Malang
[2] Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin

Email : andi.daniah.fmipa@um.ac.id *(A.D.Pahrany)*, nurdin1701@gmail.com *(Nurdin)*, hasmaba97@gmail.com *(Hasmawati)*
*****Corresponding Author

Abstract
For a graph G that have vertex set V and edge set E. A labelling $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,k\}$ is called a vertex irregularity total k-labeling of G if for any two different vertices x and y in V have $wt(x) \neq wt(y)$ where $wt(x) = f(x) + \sum_{y \in V(G)} f(xy)$. The smallest positive integer k such that G has a vertex irregular total k-labeling is called the total vertex irregularity strength of G, denoted by $tvs(G)$.
In this paper, we determined the total vertex irregularity strength of Unidentified Flying Object Graph, $tvs(U_{m,n})$. The result in this paper as follows:

$$tvs\left(U_{m,n}\right) = \left\lceil\frac{3n+1}{2}\right\rceil \text{ for } 3 \leq m \leq 3\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil, n \geq 3, \text{ and}$$
$$tvs\left(U_{m,n}\right) = \left\lceil\frac{3n+m}{3}\right\rceil \text{ for } m > 3\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil, n \geq 3.$$

***Keywords**: UFO Graph, Total Vertex Irregular Labeling, Total Vertex Irregularity Strength*

Submitted: 3 March 2022; Revised: 22 June 2022; Accepted Publication: 16 July 2022;
Published Online: July 2022
DOI: 10.17977/um055v3i2p15-20

PENDAHULUAN

Pada tahun 1736, Leonhard Euler mendiskusikan kemungkinan melintasi semua jembatan yang berada di kota Konisberg dengan melintas sekali lalu kembali ke kota asal. Diusulkan solusi dari masalah tersebut dengan memisalkan kota dan jembatan masing-masing sebagai titik dan sisi yang hingga kini dikenal dengan teori graf. Teori ini kemudian mulai dikembangkan oleh para ahli matematika. Secara umum, titik, sisi dan himpunan bilangan asli menjadi representasi objek kajian dari graf. Hingga pada tahun 1963 untuk pertama kalinya pelabelan graf diperkenalkan oleh Sadlacek, diikuti Stewart tahun 1966 serta Kotzig dan Rosa tahun 1970.

Domain berupa elemen dari graf yang dipetakan ke himpunan bilangan bulat positif disebut sebagai pelabelan graf. Pelabelan graf berdasarkan domainnya dibagi menjadi dua. Pelabelan dengan himpunan sisi yang berasal dari suatu graf sebagai domainnya dinamakan pelabelan sisi (*edge labeling*), sedangkan pelabelan dengan himpunan titik yang berasal dari suatu graf sebagai domain dinamakan pelabelan titik (*vertex labeling*). Penggabungan domain yang merupakan himpunan titik dan himpunan sisi yang berasal dari suatu graf dinamakan pelabelan total (*total labeling*).

Pada tahun 2007, Baca dkk melakukan pengkajian pada pelabelan total yang kemudian dinamakan pelabelan total tidak teratur (*total irreguler labeling*). Dalam pelabelan tersebut dibagi menjadi dua jenis pelabelan yaitu pelabelan total tidak teratur sisi dan pelabelan total tidak teratur titik.

Penelitian mengenai pelabelan total tidak teratur titik telah diaplikasikan pada beberapa graf. Salah satunya yaitu pelabelan total tidak teratur titik yang diaplikasi kan pada graf bipartid lengkap. Nurdin dkk, 2010 mengaplikasikan pelabelan total tidak teratur titik pada graf pohon dan memperoleh nilai total tidak teratur titik dari graf tersebut.

Trisyarini, 2014 mengkaji mengenai nilai total tidak teratur sisi dari graf *Unidentified Flying Object* (UFO). Pada penelitian ini diperoleh nilai untuk batas atas terkecil dan batas bawah terbesar pada graf UFO.

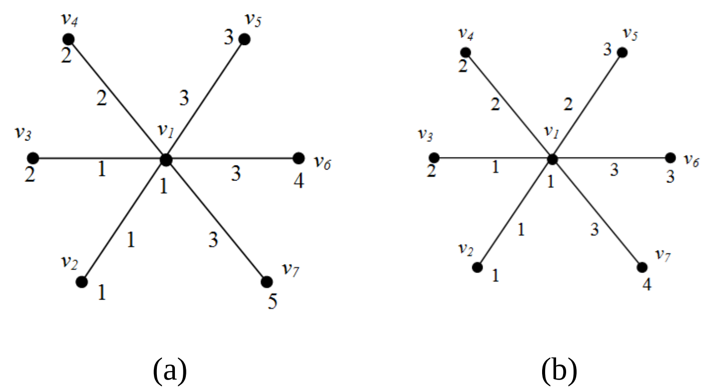
METODE PENELITIAN

Pelabelan total tidak teratur titik yang digunakan pada penelitian ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

Misalkan $G(V, E)$ merupakan graf sederhana. Pada pelabelan dengan fungsi $f: V \cup E \to \{1,2,3, \dots, k\}$ dikatakan memenuhi definisi pelabelan-k total tidak teratur titik (*total vertex irregularity k-labeling*) untuk graf G jika setiap dua titik yang berbeda pada V, memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$ dengan

$$wt(x) = f(x) + \sum_{y \in V(G)} f(xy)$$

Nilai total ketidakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari suatu graf G merupakan bilangan bulat positif terkecil k sedemikan sehingga graf G mempunyai suatu pelabelan-k tidak teratur titik, yang kemudian diberi notasi $tvs(G)$.



Gambar 1. Nilai Total Tidak Teratur Titik pada Graf S_6

Gambar 1 (a) adalah cara penentuan nilai total tidak teratur pada S_6 dengan derajat 5 sebagai derajat terbesar yang kemudian disebut pelabelan-5 tidak teratur titik pada S_6, sedangkan Gambar 1 (b) merupakan cara penentuan nilai total tidak teratur pada S_6 dengan derajat terbesarnya adalah 4 maka disebut pelabelan-4 total tidak teratur titik S_6. Untuk graf S_6 tidak mempunyai pelabelan-2 dan pelabelan-3 total tidak teratur titik maka nilai $k = 4$ merupakan nilai terkecil. Dengan deminikain diperoleh bahwa nilai total tidak teratur titik untuk S_6 yaitu 4.

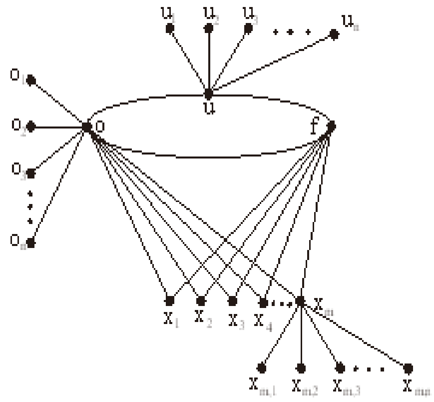
Menurut Nurdin dkk, 2010, misalkan suatu graf G yang memiliki n_i titik dengan derajat i untuk $i = \delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots, \Delta$, dengan δ dan Δ merupakan minumum dan maksimum derajat titik pada graf G, maka

$$tvs(G) \geq maks\left\{\left\lceil\frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1}\right\rceil, \left\lceil\frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta + 2}\right\rceil, \dots, \left\lceil\frac{\delta + \sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta + 1}\right\rceil\right\}.$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf *Unidentified Flying Object* (UFO) merupakan suatu graf yang kontruksinya berasal dari graf buku segitiga dengan satu titik sekutu dan dua titik lain ditambah sebanyak n sisi. Graf UFO dikembangkan dari graf Bt_m dengan n sisi tambahan, dinotasikan dengan $U_{m,n}$.

Graf ini memiliki himpunan titik, $V = \{U, F, O, u_j, o_j, x_i, x_{m,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n; m, n \in N\}$ dan himpunan sisi, $E = \{Fx_i, UF, FO, UO, Ox_i, x_m x_{m,j}, Uu_j, Oo_j;\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n; m, n \in N\}$.



Gambar 2. Graf UFO ($U_{m,n}$)

Nilai Total Tidak Teratur Titik Graf UFO

Pada artikel ini, nilai total ketidakteraturan titik dibagi menjadi dua kasus yaitu sebagai berikut

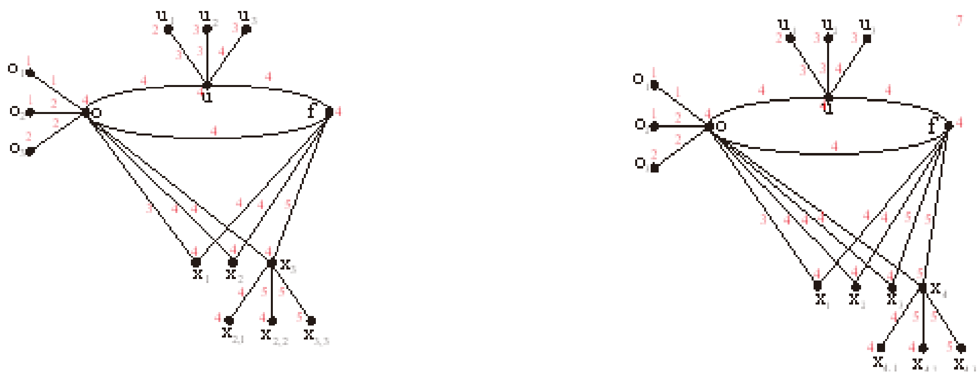
Kasus I. Untuk $\boldsymbol{m < 3\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil; m, n \geq 3}$

Berdasarkan Teorema 2.5.1, untuk $m = 3,4, \ldots, \left(3\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil - 1\right)$ dan $n = 3$, untuk nilai total tidak teratur titik diperoleh batas bawah graf $U_{m,3}$ seperti pada Tabel 1

Tabel 1. Batas Bawah Nilai Total Tidak Teratur Titik pada Graf $U_{m,3}$

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{n_\delta}$	$\left\lceil\frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1}\right\rceil \leq tvs(U_{m,3})$
3	1	9	5
4	1	9	5
5	1	9	5

Keterangan:
δ: derajat minimum
n_δ: banyaknya titik yang berderajat minimum



(a) (b)

Gambar 3. (a) Pelabelan-5 Total Tidak Teratur Titik Graf $U_{3,3}$ (b) Pelabelan-5 Total Tidak Teratur Titik $U_{4,3}$

Penentuan batas atas untuk $U_{m,3}$ dengan $m = 3$ dan 4 maka label nilai sisi dan titik dapat dilihat pada Gambar 3.

Berdasarkan pelabelan yang telah dibuat pada Gambar 3 maka untuk suatu pelabelan sisi dan titik dengan $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$ sebagai berikut

$$f(Oo_j) = \left\lceil \frac{j+1}{2} \right\rceil$$
$$f(Uu_j) = \left\lceil \frac{n+j+1}{2} \right\rceil$$
$$f(x_{m,j}x_m) = \left\lceil \frac{2n+j+1}{2} \right\rceil$$
$$f(Ox_i) = \left\lceil \frac{3n-1+i}{3} \right\rceil$$
$$f(Fx_i) = \left\lceil \frac{3n+1+i}{3} \right\rceil$$
$$f(o_j) = \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil$$
$$f(u_j) = \left\lceil \frac{n+j}{2} \right\rceil$$
$$f(x_{m,j}) = \left\lceil \frac{2n+j}{2} \right\rceil$$
$$f(x_i) = \left\lceil \frac{3n+i}{3} \right\rceil$$
$$f(O) = f(U) = f(F) = f(UF) = f(UO) = f(OF) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil - 1.$$

Berdasarkan pelabelan tersebut dipeorleh
$wt(o_j) < \cdots < wt(o_n) < wt(u_j) < \cdots < wt(u_n) < wt(x_{m,j}) < \cdots < wt(x_{m,n}) < wt(x_i) < \cdots < wt(x_{m-1}) < wt(U) < wt(x_m) < wt(F) < wt(O)$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap titik dan sisi pada graf UFO diperoleh label terbesar adalah

$$f(x_m x_{m,n}) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil .$$

Sehingga diperoleh $tvs(U_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$. Dengan demikian diperoleh $tvs\ (U_{m,n}) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$.

Kasus II. Untuk $\boldsymbol{m = 3\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil; m, n \geq 3}$

Berdasarkan Teorema 2.5.1, untuk $m = 3\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ dan $n = 3,4,5$ untuk nilai total tidak teratur titik, diperoleh batas bawah untuk graf $U_{m,n}$ dipeoleh seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Batas Bawah Nilai Total Tidak Teratur Titik $U_{3\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil,n}$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{n_\delta}$	$\left\lceil \frac{\boldsymbol{\delta + n_\delta}}{\boldsymbol{\delta + 1}} \right\rceil \leq \boldsymbol{tvs(U_{3\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil,n})}$
3	6	1	9	5
4	9	1	12	7
5	9	1	15	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$3\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$	1	$3n$	$\left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$

Keterangan:
δ: derajat minimum
n_δ: banyak titik yang berderajat minimum

Berdasarkan cara pelabelan seperti pada Tabel 2 diperoleh suatu pola pada pelabelan titik dan sisi dengan $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$ yaitu

$$f(Oo_j) = \left\lceil \frac{j+1}{2} \right\rceil$$
$$f(Uu_j) = \left\lceil \frac{n+j+1}{2} \right\rceil$$
$$f(x_{m,j}x_m) = \left\lceil \frac{2n+j+1}{2} \right\rceil$$
$$f(o_j) = \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil$$
$$f(u_j) = \left\lceil \frac{n+j}{2} \right\rceil$$
$$f(x_{m,j}) = \left\lceil \frac{2n+j}{2} \right\rceil$$
$$f(x_m) = f(Ox_m) = f(Fx_m) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$$
$$f(F) = f(U) = f(UF) = f(UO) = f(OF) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil - 1$$
$$f(O) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil - 2.$$

Untuk $i = 1,2,\dots,m-1$, pelabelannya adalah

$$f(Ox_i) = \left\lceil \frac{3n-1+i}{3} \right\rceil$$
$$f(Fx_i) = \left\lceil \frac{3n+1+i}{3} \right\rceil$$
$$f(x_i) = \left\lceil \frac{3n+i}{3} \right\rceil$$

Berdasarkan pelabelan tersebut diperoleh

$wt(o_j) < \cdots < wt(o_n) < wt(u_j) < \cdots < wt(u_n) < wt(x_{m,j}) < \cdots < wt(x_{m,n}) < wt(x_i) < \cdots < wt(x_{m-1}) < wt(U) < wt(x_m) < wt(F) < wt(O)$.

Dari persamaan tersebut diperoleh bahwa untuk setiap titik pada $U_{m,n}$ berbeda. Maka fungsi f yang telah dikonstruksi merupakan suatu pelabelan total tidak teratur titik pada $U_{m,n}$.

Berdasarkan pelabelan dari titik dan sisi pada graf UFO diperoleh label terbesar adalah

$$(x_m x_{m,n}) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil.$$

PENUTUP

Berdasarkan uraian tersebut dapat disimpulkan nilai total teratur titik pada graf *Unidentified Flying Object* yaitu:

(i) untuk $3 \le m \le 3\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ dan $n \ge 3$, bergantung pada titik berderajat satu, $tvs(U_{m,n}) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$;

(ii) untuk $m > 3\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ dan $n \ge 3$, bergantung pada titik berderajat dua, $tvs(U_{m,n}) = \left\lceil \frac{3n+m}{3} \right\rceil$.

DAFTAR RUJUKAN

Andrianata, S. (2012). Nilai Total Ketidakteraturan Total Sisi dari Graf Buku Segitiga. Universitas Jember.

Baca, M., Jendrol, S., Miller, M., & Ryan, J. (2007). On Irregular Total Labelings. *Dicrete Mathematics*, 1378-1388.

Bondy, J., & Murty. (2008). *Graph Theory with Application.* United States of America: Springer.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (2000). *Graph & Digraph Third Edition.* United States of America: Chapman & Hall.

Hartsfield, N., & Ringel, G. (2003). *Pearls in Graph Theory: A Comperhensive Introduction.* Boston: Academic Press.

Miller, M., & Baca, M. (2008). *Super Edge-Antimagic Graph.* Boca Rato, Florida: Brown Walker Press.

Nurdin, Baskoro, E., & Salman, A. (2010). On Total Vertex-Irregular Labeling for Several Types of Tree. *Utilitas Mathematics,* 83:277-290.

Sedlacek, J. (1982). *In Theory of Graphs and Its Application.* Birkhauser Basel: Springer.

Stewart, B. (1966). Magic Graphs. *Canadian Journal of Mathematics,* 18:1031-1059.

Wallis, W. (2011). *Magic Graphs.* Birkhauser Boston: New York.

West, D. (2001). *Introduction to Graph Theory.* Prentice Hall.