

PENALARAN PROPORSIONAL DALAM MENYELESAIKAN MASALAH MULTIPLIKATIF TIPE *PRODUCT OF MEASUREMENT*

Uun Hariyanti¹, Edy Bambang Irawan², Erry Hidayanto³

^{1, 2, 3} Universitas Negeri Malang

¹nyunstory@gmail.com, ²edy.bambang.fmipa@um.ac.id, ³erry.hidayanto.fmipa@um.ac.id

Abstract

This study aims to explore students' proportional reasoning in solving multiplicative problems on products of measurement type. Three 8 grade students of Public Junior High School 21 Malang were being purposively studied. The sampling technique is also called as the judgement sampling. Data then was being analyzed in three steps: data reduction, data presentation, and conclusion drawing/verification. The data were studied and analyzed based on Bexter's and Junker's Constructions of Proportional Reasoning theory consisting of five stages: (1) qualitative; (2) early attempts at quantifying; (3) recognition of multiplicative relationships; (4) accommodating covariance and invariance, and (5) functional and scalar relationships. Result shows that students with low capability (S1) solved problems by registering the number of first measurement then pair it with second measurement by summing the two measurements identified as early attempts at quantifying phase. It is also found that students with moderate capability (S2) solved the problem by registering all existing possibilities and then summing them all, concluding them qualified as being in recognition of multiplicative relationships phase. Moreover, students with high capability (S3) solved the problem by listing the number of the first measurement then multiplying it with the second measurement, qualifying them as being in the accommodating covariance and invariance phase in proportional reasoning.

Keywords: *multiplicative, proportional, reasoning*

Submit: 2 Agustus 2016, Publish: 25 April 2017

PENDAHULUAN

Berpikir matematis merupakan proses berpikir yang memerlukan keahlian dalam menyusun suatu alasan yang logis dalam menghadapi suatu situasi. Proses berpikir tersebut terkait dengan segala jenis kegiatan mental seperti abstraksi, pemecahan masalah, pembuktian, generalisasi, dan penalaran. Terdapat tiga tipe dasar berpikir matematis yang paling berguna dalam kehidupan yaitu (1) penalaran proporsional, (2) estimasi, dan (3) aktivitas pemodelan matematika yang selaras dengan membangun konseptual dalam berpikir proporsional (Sriraman dan Steinhordottir, 2009).

Penalaran proporsional berkaitan dengan kepekaan siswa terhadap situasi yang melibatkan hubungan proporsional. Behr dan Lesh (dalam Cai dan Sun, 2002:195) berpendapat bahwa penalaran proporsional terkait dengan kepekaan terhadap kovariansi (*a sense of covariation*), perbandingan berganda (*multiple comparisons*), dan kemampuan untuk mengingat dan memproses beberapa bagian dari suatu informasi. Cai dan Sun (2002:195) menyebutkan bahwa secara matematis suatu hubungan proporsional dapat direpresentasikan dalam bentuk fungsi $y = mx$ (proporsional langsung) atau $xy = m$ (proporsional invers), dengan m adalah konstanta. Secara psikologi, penalaran proporsional adalah suatu cara berpikir yang melibatkan kepekaan tentang hubungan kuantitatif dan membandingkan rasio.

Kemampuan mengonstruksi pengetahuan sesuai dengan masalah yang dihadapi merupakan kemampuan yang diajarkan saat seseorang belajar matematika. Belajar menentukan prosedur yang efisien merupakan salah satu bagian penting selama belajar matematika, namun dalam jangka panjang kemampuan untuk menyesuaikan pengetahuan ke dalam konsep yang sesuai dengan permasalahan merupakan ketrampilan yang mutlak dibutuhkan (Tall, 2008). Sejalan dengan pendapat Tall, Fleener (1993) berpendapat bahwa penalaran proporsional merupakan kemampuan yang diperoleh dengan cara dibangun dan bukan berasal dari keahlian yang memang dimiliki oleh seseorang.

Dasar dalam membangun penalaran proporsional pada matematika sekolah telah diajarkan sejak siswa berada di sekolah dasar hingga sekolah menengah pertama. Selanjutnya strategi penalaran proporsional terus digunakan dalam mempelajari materi matematika pada tingkat yang lebih kompleks seperti pada konsep trigonometri, kesebangun, fungsi, dan lain lain. Hal ini menunjukkan bahwa penalaran proporsional merupakan kemampuan yang penting dan harus dimiliki oleh siswa dalam mempelajari matematika.

Penalaran proporsional terkait dengan berpikir multiplikatif (Norton, 2005, Cetin dan Ertekin, 2011). Kepekaan dalam menggunakan cara berpikir multiplikatif memudahkan seseorang ketika dihadapkan pada

situasi yang melibatkan proporsi. Terkait dengan konsep multiplikatif, Vergnaud (1994) mengklasifikasikan konsep tersebut ke dalam beberapa jenis masalah, salah satunya yaitu masalah *product of measurement*.

Product of measurement merupakan suatu masalah yang melibatkan perkalian kartesius antara dua ruang pengukuran dan dipetakan pada ruang pengukuran yang ke tiga (Wright, 2011). Masalah yang termasuk *product of measurement* berbeda dengan masalah proporsi sederhana atau disebut juga masalah proporsi langsung. Pada masalah proporsi langsung, hasil dari perkalian antara dua pengukuran adalah salah satu kuantitas yang digunakan. Contoh masalah proporsi langsung yaitu, terdapat 6 donat dalam satu kotak donat milik Jimy, ada berapa banyak donat yang dimiliki Jimy jika tersedia 4 kotak donat? Pada masalah tersebut, perkalian antara banyaknya kotak dengan banyaknya donat dalam satu kotak menghasilkan banyaknya donat yang dimiliki Jimy. Itu artinya hasil dari perkalian antara dua pengukuran adalah banyaknya donat yang merupakan kuantitas dari salah satu pengukuran yang diketahui sebelumnya.

Berbeda dengan masalah proporsi langsung, masalah *product of measurement* melibatkan masalah yang hasil dari perkalian dua pengukuran adalah pengukuran yang berdiri sendiri dan berbeda dari pengukuran asalnya. Contoh masalah *product of measurement* yaitu, terdapat 13 kartu hati dan 13 kartu sekop, ada berapa banyak kemungkinan pasangan kartu yang terdiri dari satu kartu sekop dan satu kartu hati yang dapat dibuat? Pada masalah tersebut terlihat bahwa hubungan multiplikatif yang terjadi pada pengukuran yang ada berbeda dengan yang dimiliki oleh masalah proporsi langsung. Misalnya terdapat 1 kartu hati dan 1 kartu sekop, maka banyaknya pasangan adalah 1 yang diperoleh dari $1 \times 1 = 1$. Pengukuran yang pertama adalah banyaknya kartu hati, pengukuran yang kedua adalah banyaknya kartu sekop, sedangkan hasil perkalian dari kedua pengukuran tersebut adalah banyaknya pasangan kartu hati dan sekop. Hal ini menunjukkan bahwa hasil kali antara dua pengukuran yang diketahui sebelumnya berbeda dengan pengukuran yang merupakan hasil dari perkaliannya.

Observasi awal yang dilakukan oleh peneliti menunjukkan bahwa siswa dapat menyelesaikan masalah proporsi langsung meskipun dengan cara yang berbeda yaitu dengan menggunakan formula $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, menggunakan perkalian dengan mencari unsur satuan terlebih dahulu, dan dengan cara penjumlahan. Keadaan yang berbeda terjadi ketika siswa diminta untuk menyelesaikan masalah *product of measurement*. Siswa tersebut mengalami masalah dan terdapat siswa yang menggunakan penalaran yang salah. Salah satu subjek pada observasi awal menjawab dengan cara mendaftar terdapat 1 kartu queen, 1 kartu king, dan 1 kartu jack pada kartu hati serta terdapat 1 kartu queen, 1 kartu king, dan 1 kartu jack pada kartu sekop. Sehingga terdapat 6 kartu berbeda. Padahal, yang diminta dari soal adalah banyaknya pasangan kartu berbeda yang terdiri dari 1 kartu hati dan 1 kartu sekop dari 13 kartu hati dan 13 kartu sekop yang tersedia, dengan syarat kartu hati yang digunakan hanya kartu king, queen, dan jack.

Berdasarkan uraian hasil observasi awal peneliti, dapat diketahui bahwa siswa memiliki penalaran yang berbeda dalam menyelesaikan masalah multiplikatif. Uraian tersebut juga menunjukkan bahwa pemahaman subjek dalam menghadapi masalah *product of measurement* masih kurang, hal ini ditunjukkan dengan siswa yang menggunakan cara penjumlahan dalam menentukan nilai yang dicari dan hasil yang diperoleh tidak sesuai dengan yang ditanyakan karena pemahaman yang salah. Salah satu penyebab dari hal ini adalah karena kurangnya pengalaman siswa dalam menghadapi masalah multiplikatif yang bervariasi.

Terkait dengan penelitian-penelitian sebelumnya, penelitian yang telah dilakukan oleh Sopamena dan Rahaded (2015) mengkaji tentang karakteristik proses penalaran proporsional yang dilakukan oleh mahasiswa IAIN Ambon dalam memecahkan masalah rasio dan proporsi. Selanjutnya, penelitian yang telah dilakukan oleh Sari dan Sufri (2014) berkaitan dengan analisis penalaran proporsional siswa kelas VII yang memiliki gaya belajar auditori dalam menyelesaikan masalah perbandingan senilai. Pada penelitian Sopamena dan Rahaded (2015), hanya menjelaskan bagaimana karakteristik tahap-tahap strategi perkalian dan strategi formal yang dilakukan oleh mahasiswa ketika menyelesaikan masalah rasio dan proporsi. Penelitian yang dilakukan oleh Sari dan Sufri (2014) menganalisis hasil penelitian tentang penalaran proporsional berdasarkan tiga indikator penalaran proporsional. Selain kedua penelitian tersebut, terdapat pula penelitian yang dilakukan oleh Hines dan McMahan (2005). Penelitian Hines dan McMahan (2005) hanya menjelaskan tentang interpretasi dari calon guru terhadap strategi penalaran proporsional yang digunakan oleh siswa sekolah menengah ketika menyelesaikan masalah yang melibatkan situasi proporsional.

Masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah jenis masalah *product of measurement* dan subjek penelitian adalah siswa kelas VIII sehingga penelitian ini tidak dapat dianalisis dengan hasil penelitian Sopamena dan Rahaded (2015) karena pada penelitian tersebut hanya dijelaskan bagaimana karakteristik tahap-tahap strategi perkalian dan strategi formal yang dilakukan oleh mahasiswa ketika menyelesaikan masalah rasio dan proporsi. Selain itu, dalam penelitian ini akan digunakan pertanyaan wawancara yang tidak terbatas hanya pada informasi yang diketahui pada soal dan keyakinan subjek penelitian terhadap jawaban yang dituliskannya, tetapi juga kepada detail proses penalaran proporsional dan juga dasar dari penalaran yang digunakan oleh siswa dalam menyelesaikan masalah *product of measurement*. Oleh karena itu, penelitian ini

akan menindaklanjuti dengan mengkaji bagaimana penalaran proporsional siswa kelas VIII dalam menyelesaikan masalah multiplikatif tipe *product of measurement*.

Strategi penalaran yang digunakan oleh siswa didasarkan pada teori membangun penalaran proporsional oleh Baxter dan Junker (dalam Weaver dan Junker, 2004). Baxter and Junker (dalam Weaver and Junker, 2004) mengidentifikasi terdapat lima tahap untuk membangun penalaran proportional berdasarkan perubahan kualitatif pada respon siswa terhadap masalah proporsional. Kelima tahap tersebut adalah (a) *qualitative*, (b) *early attempts at quantifying*, (c) *recognition of multiplicative relationships*, (d) *accommodating covariance and invariance*, dan (e) *functional and scalar relationships*. Dalam penelitian yang dilakukan oleh Cayton-Hodges, dkk (2012) kelima tahap tersebut juga digunakan untuk membuat prototype tugas sebagai desain assessmen untuk mengetahui pemahaman dan kemampuan siswa dalam penalaran proporsional.

METODE

Penelitian ini dilakukan pada siswa kelas VIII.1 SMPN 21 Malang tahun akademik 2015-2016. Subjek penelitian diperoleh berdasarkan hasil pengujian terhadap 36 siswa yang diminta untuk mengerjakan masalah *product of measurement*. Pemilihan subjek terbatas hanya 3 orang siswa yang berasal dari tingkat kemampuan matematika yang berbeda yaitu tinggi, sedang, dan rendah. Hal ini dikarenakan agar pengamatan yang dilakukan menjadi lebih rinci dan mendalam.

Kriteria yang dilihat agar siswa menjadi subjek penelitian adalah selain kriteria kemampuan dalam matematika juga dilihat bahwa siswa yang menjadi subjek harus menjawab tiga soal yang yang diberikan. Tujuan dari pemilihan subjek penelitian yang seperti disebutkan agar peneliti dapat memperoleh data yang lengkap dalam penelitian dan lebih mudah dalam mendeskripsikan proses berpikir siswa saat melakukan penalaran proporsionalnya. Tiga subjek penelitian yang telah dipilih akan melakukan sesi wawancara untuk mengetahui bagaimana cara berpikir subjek saat menyelesaikan masalah *product of measurement*. Peneliti merekam ungkapan verbal siswa dan mencatat perilaku (ekspresi) siswa ketika menyelesaikan soal tersebut.

Berdasarkan langkah-langkah pemilihan subjek tersebut maka teknik pemilihan subjek dalam penelitian ini adalah *purposive sampling* atau disebut juga *judgment sampling*. *Purposive sampling* adalah teknik pengambilan sampel penelitian yang didasarkan pada pertimbangan tertentu dengan tujuan untuk memperoleh sampel penelitian yang memiliki karakteristik sesuai dengan tujuan penelitian.

Analisis data dalam penelitian ini dilakukan berdasarkan teknik analisis yang dikemukakan oleh Miles dan Huberman (1992). Langkah-langkah analisis data yang dimaksudkan yaitu (1) mereduksi data, (2) menyajikan data, (3) menarik kesimpulan/verifikasi. Kegiatan yang dilakukan saat mereduksi data dalam penelitian ini yaitu membuat transkrip data hasil wawancara dari catatan tertulis dan hasil rekaman, mengkategorikan data sesuai dengan indikator dari penalaran proporsional, serta menyisihkan data-data yang tidak diperlukan. Penyajian data merupakan tahapan setelah melakukan reduksi data. Penyajian data bertujuan untuk menyusun informasi-informasi yang diperoleh saat penelitian secara runtut dan jelas untuk kemudian digunakan oleh peneliti sebagai dasar penarikan suatu kesimpulan. Penarikan kesimpulan dilakukan berdasarkan hasil dari penyajian data yang telah dilakukan. Kesimpulan yang dihasilkan juga diverifikasi selama penelitian berlangsung. Verifikasi dilakukan dengan cara memeriksa kembali tentang apa yang dipikirkan dan ditemukan oleh peneliti selama penelitian berlangsung, tinjauan ulang terhadap catatan-catatan lapangan, melakukan peninjauan kembali serta *peer review*, membandingkan dengan teori-teori dan penelitian-penelitian sebelumnya. Verifikasi bertujuan untuk menguji kembali kebenaran, kekokohan, dan kecocokan dari kesimpulan yang dibuat oleh peneliti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan penalaran proporsional siswa kelas VIII dalam menyelesaikan masalah multiplikatif tipe *product of measurement* berdasarkan strategi penyelesaian masalah yang digunakan oleh siswa. Masalah *product of measurement* (MPM) adalah masalah yang melibatkan perkalian kartesian antara dua ruang pengukuran pada ruang pengukuran yang ke tiga. Berdasarkan definisinya MPM merupakan masalah yang tidak melibatkan proporsi langsung tapi melibatkan dua proporsi yang berdiri sendiri. Berikut adalah masalah *product of measurement* (MPM) yang digunakan pada penelitian ini.

Lisa memiliki 4 buku tulis dan 3 bolpoin warna. Buku tulis itu masing-masing berwarna merah, hijau, kuning dan biru. Sedangkan bolpoinnya berwarna merah, hijau dan ungu. Lisa akan memasang 2 buku tulis dan 1 bolpoin warna untuk dibungkus dengan kertas kado dan

diberikan pada Mita. Ada berapa banyak kemungkinan cara berbeda yang dapat Lisa gunakan untuk memasang 2 buku tulis dan 1 bolpoin warna?

Strategi penyelesaian masalah yang digunakan oleh siswa tersebut dikelompokkan kedalam lima tahapan berdasarkan teori membangun penalaran proporsional oleh Bexter dan Junker, yaitu (1) qualitative, (2) early attempts at quantifying, (3) recognition of multiplicative relationships, (4) accommodating covariance and invariance, dan (5) functional and scalar relationships. Berikut adalah penjelasan terkait dengan kelima tahap dalam membangun penalaran proporsional.

Tabel 1. Tahap Penalaran Proporsional Siswa

Tahap Penalaran Proporsional	Deskripsi	Penjelasan
1. <i>Qualitative</i>	Siswa memiliki banyak pengetahuan tentang kuantitas yang memungkinkan mereka untuk menjawab pertanyaan tentang keadilan (membagi sesuatu secara adil) atau pertanyaan tentang lebih dan kurang (membandingkan suatu hal). Contoh pertanyaan lebih dan kurang: minuman mana yang lebih manis? Contoh pertanyaan tentang keadilan: bagaimana cara membagi pizza sehingga setiap anak mendapat bagian yang sama besar?	<ul style="list-style-type: none"> Siswa dapat menjawab permasalahan yang melibatkan membagi suatu hal secara adil. Siswa dapat menjawab permasalahan tentang membandingkan suatu hal. Siswa menggunakan cara menebak dalam mencari suatu jawaban.
2. <i>Early attempts at quantifying</i>	Upaya awal dalam pengukuran sering melibatkan perbedaan konstanta penjumlahan dari pada menggunakan hubungan perkalian. Siswa masih mengandalkan perhitungan dengan menggunakan penambahan atau pengurangan	<ul style="list-style-type: none"> Siswa menggunakan cara penyelesaian yang melibatkan perbedaan penjumlahan yang konstan dari suatu kuantitas dari pada menggunakan hubungan perkalian. Siswa masih menggunakan penghitungan yang terus berkurang atau terus bertambah.
3. <i>Recognition of multiplicative relationships</i>	Siswa memiliki intuisi bahwa rasio adalah dua bilangan yang berubah secara bersama-sama tetapi perubahan tersebut mungkin disebabkan oleh penjumlahan atau perkalian. Siswa lebih sering menggunakan strategi penjumlahan ketika penalaran multiplikatif yang diharapkan untuk digunakan. Situasi yang melibatkan perubahan yang mutlak tidak selalu dapat dibedakan dari situasi yang melibatkan perubahan secara relative.	<ul style="list-style-type: none"> Siswa memiliki intuisi bahwa rasio adalah dua bilangan yang berubah secara bersama-sama tetapi siswa masih berpikir bahwa perubahan tersebut mungkin dapat disebabkan oleh penjumlahan atau perkalian. Siswa lebih sering menggunakan strategi penjumlahan ketika dihadapkan pada situasi perkalian.
4. <i>Accommodating covariant-ce and invariance</i>	Siswa mulai mengembangkan suatu model perubahan multiplikatif. Siswa menyadari bahwa ketika beberapa kuantitas mungkin berubah, hubungan antara kuantitas-kuantitas tersebut tetap invariant. Siswa memandang rasio sebagai unit satuan yang mungkin digunakan. Siswa dapat membedakan antara situasi yang melibatkan perubahan mutlak	<ul style="list-style-type: none"> Siswa mulai mengembangkan suatu model penyelesaian yaitu jika beberapa kuantitas berubah, namun hubungan dari kuantitas-kuantitas tersebut tetap. Siswa mencari faktor satuan dan pendekatan perkalian

Tahap Penalaran Proporsional	Deskripsi	Penjelasan
	dan situasi yang melibatkan perubahan secara relative. Strategi perkalian digunakan pada konteks atau masalah tertentu, namun jika siswa dihadapkan pada konteks yang tergolong sulit siswa akan kembali menggunakan penalaran penjumlahan.	skalar untuk membangun model yang dia kembangkan. <ul style="list-style-type: none"> • Siswa dapat menemukan nilai satuan dari pengukuran yang ada dan menggunakannya dalam menyelesaikan masalah secara keseluruhan • Ketika siswa gagal dalam mebangun model penyelesaian, siswa kembali pada cara menentukan perbedaan dalam penjumlahan.
5. <i>Functional and scalar relationships</i>	Siswa mengetahui sifat hubungan invarian antara kuantitas yang berubah. Siswa memiliki model umum untuk memecahkan masalah dan memilih strategi yang efisien untuk digunakan. Siswa memahami dengan baik tentang konsep dari kovarian dan invarian.	<ul style="list-style-type: none"> • Siswa memahami adanya hubungan yang tetap antara kuantitas yang berubah. • Siswa memiliki model umum untuk memecahkan masalah dan memilih strategi yang efisien untuk digunakan. • Siswa memahami struktur hubungan yang ada pada setiap pengukuran

Selanjutnya akan dipaparkan data dan penalaran proporsional siswa dalam menyelesaikan masalah *product of measurement*, yaitu dari siswa berkemampuan rendah (S1), siswa berkemampuan sedang (S2), dan siswa berkemampuan tinggi (S3).

Siswa berkemampuan matematika rendah (S1)

S1 menyelesaikan MPM dengan menganggap bahwa masalah tersebut merupakan masalah yang menyerupai himpunan. S1 menggunakan cara mendaftar banyaknya pasangan buku yang mungkin, untuk kemudian dijumlahkan dengan banyaknya bolpoin. S1 menganggap bahwa anggota himpunan yang dicari adalah gabungan dari 6 pasang buku yang telah dicari dengan cara mendaftar dengan 3 bolpoin warna yang telah diketahui dari soal. Strategi yang digunakan oleh S1 merupakan strategi penjumlahan, dan solusi yang diberikan merupakan solusi yang salah. S1 salah dalam memahami apa yang ditanyakan dari soal. Berikut adalah hasil wawancara S1.

P : bagaimana kamu menyelesaikan soal tersebut?

S1 : Saya membuat pasangan-pasangan antara 2 buku dengan 1 bolpoin warna seperti memasang buku warna merah dan hijau dengan 1 bolpoin warna hijau, biru, atau ungu. Terus, memasang buku merah dan kuning dengan 1 bolpoin warna hijau, biru, atau ungu. Terus, memasang lagi buku merah dan biru dengan 1 bolpoin warna hijau, biru, atau ungu. Dan seterusnya.

P : Pada cara tersebut, kamu membuat pasangan buku dulu kemudian bolpoin, atau bolpoin dulu kemudian dipasangkan dengan 2 buku, atau memasangkannya secara bersama-sama?

S1 : Saya mencari pasangan dua buku dulu baru kemudian saya pasang dengan 3 bolpoin warna yang ada.

P : Kemudian, kenapa kamu menggunakan cara 6 + 3?

S1 : Karena saya berpikir bahwa banyaknya pasangan bukunya ada 6 sedangkan bolpoinnya ada 3 macam. Jadi saya jumlahkan 6 dengan 3.

Berdasarkan wawancara tersebut, terlihat bahwa S1 kurang mengerti hubungan multiplikatif pada saat memasang antara 6 pasang buku dengan 3 bolpoin yang berbeda. S1 pertama mencari banyaknya pasangan buku (M_1) dengan cara mendaftar semua kemungkinan yang ada dari 4 buku yang tersedia yaitu diperoleh 6 pasang. Siswa memahami memasang dua buah pengukuran, yaitu M_1 dan M_2 dengan M_1 adalah banyaknya

pasangan 2 buku dan M_2 banyaknya bolpoin, berarti menjumlahkan antara M_1 dan M_2 . Siswa memahami M_1 sebagai banyaknya anggota himpunan yang dapat dibentuk dengan cara memasangkan 2 buku dari 4 buku yang ada dan M_2 sebagai banyaknya anggota pada himpunan bolpoin. Karena yang dicari adalah $M_1 \cup M_2$ maka berarti $n(M_1) + n(M_2) = 6 + 3$.

Siswa berkemampuan matematika sedang (S2)

S2 pada awalnya berpikir bahwa MPM adalah masalah yang terkait dengan fungsi. Namun, S2 mengalami kesulitan dalam menyelesaikan masalah tersebut dengan rumus fungsi yang dia ketahui. Berikut adalah wawancara yang dilakukan terhadap S2.

- P* : Apakah kamu sudah pernah menyelesaikan soal seperti ini?
S2 : Sepertinya pernah. Masalah seperti ini memakai rumus fungsi.
P : Apa rumus fungsi yang kamu maksud?
S2 : Saya tidak dapat menemukan rumus fungsi yang dapat saya gunakan untuk menyelesaikan soal ini.
P : Apa rencana kamu untuk menyelesaikan masalah seperti soal ini?
S2 : karena saya lupa rumus fungsi maka saya menggunakan cara manual yaitu dicoba satu-satu dengan cara mendaftar semua kemungkinan yang ada. Kemudian saya jumlahkan semuanya.
P : Dari cara kamu tersebut ada berapa banyak kemungkinan yang ada?
S2 : 18 kemungkinan.

Berdasarkan wawancara tersebut, terlihat bahwa S2 kurang mengerti hubungan multiplikatif pada saat memasangkan antara 6 pasang buku dengan 3 bolpoin yang berbeda. Namun, S2 menyadari bahwa masalah tersebut mungkin dapat diselesaikan dengan rumus fungsi namun siswa tidak dapat menentukan bagaimana hubungan yang terjadi pada setiap ruang pengukurannya, sehingga siswa memilih menggunakan cara mendaftar semua kemungkinan. S2 mendaftar terlebih dahulu banyaknya kemungkinan 2 pasang buku dari 4 buku berbeda yang tersedia. Setelah memperoleh semua daftar 2 pasang buku, S2 mendaftar kembali yang terdiri dari 2 buku dan 1 bolpoin. Kemudian, S2 menghitung banyak semua kemungkinan yang diperoleh dari daftar tersebut yaitu 18 kemungkinan.

Berdasarkan strategi yang dilakukan oleh S2, terlihat bahwa S2 menggunakan cara mencari unsur satuan untuk M_1 dan M_2 . Kemudian, S2 mencari unsur satuan dari M_3 dengan cara memasangkan setiap unsur satuan dari M_1 dan M_2 . S2 menggunakan cara penjumlahan untuk mencari M_3 .

Siswa berkemampuan matematika tinggi (S3)

S3 menyelesaikan masalah MPM dengan menggunakan hubungan multiplikatif antara banyaknya 2 pasang buku (M_1) dan banyaknya bolpoin (M_2).

- P* : Apa rencana kamu untuk menyelesaikan masalah seperti soal ini?
S3 : Pertama saya mencari banyaknya kemungkinan 2 pasang buku lebih dulu.
P : Ada berapa banyak kemungkinannya?
S3 : Ada 6 kemungkinan.
P : Bagaimana cara kamu memperoleh keenam kemungkinan tersebut?
S3 : Saya mencarinya dengan cara memasangkan merah dengan hijau, merah dengan kuning, merah dengan biru, hijau dengan kuning, hijau dengan biru, dan kuning dengan biru.
P : Setelah itu apa yang kamu lakukan?
S3 : Terus, karena di sini bolpoinnya ada tiga maka 6 kemungkinan itu langsung saya kalikan dengan 3. Sehingga $6 \times 3 = 18$.

S3 menyadari hubungan multiplikatif antara M_1 dan M_2 pada MPM. S3 mengalami kegagalan memanfaatkan hubungan multiplikatif untuk mencari banyaknya 2 pasang buku yang dapat dibentuk dari 4 pasang buku berbeda (M_1). Oleh karena itu, S3 menggunakan cara mendaftar unsur satuan dan menggunakan cara penjumlahan untuk mencari M_1 . S3 mencari banyaknya kemungkinan 2 buku dan 1 bolpoin (M_3) dengan cara mengalikan 6 kemungkinan yang ada (M_1) dengan 3 bolpoin (M_2), sehingga diperoleh $M_3 = M_1 \times M_2$.

Berdasarkan tahap mengembangkan penalaran proporsional oleh Bexter dan Junker (dalam Weaver and Junker, 2004) proses yang telah dilalui oleh S1 masuk dalam tahap *early attempts at quantifying*. Cayton-Hodges, dkk (2012) menyatakan bahwa siswa yang berada pada level *early attempts at quantifying* cenderung menggunakan konstanta penjumlahan dari pada memanfaatkan hubungan multiplikatif yang ada. S1 gagal dalam membuat hubungan antara dua pengukuran yang ada sehingga S1 menggunakan strategi secara acak. Hal ini terlihat ketika S1 berhasil dalam mencari banyaknya 2 pasang buku yang dapat dibentuk dari 4 pasang buku berbeda (M_1), namun S1 tidak dapat menerapkan penalaran yang serupa untuk mencari banyaknya

kemungkinan 2 buku dan 1 bolpoin (M_3). Menurut Langral dan Swafford (2000), strategi yang digunakan oleh S1 termasuk dalam level *nonproportional reasoning* dimana siswa tidak memberikan penyelesaian yang benar dari masalah yang diberikan dan penalaran yang digunakan oleh siswa merupakan penalaran yang salah.

S2 memiliki pemahaman bahwa MPM merupakan masalah yang dapat memanfaatkan hubungan multiplikatif, namun S1 gagal dalam menentukan hubungan multiplikatif yang terjadi pada tiap unsurnya. Berdasarkan tahap mengembangkan penalaran proporsional oleh Bexter dan Junker (dalam Weaver and Junker, 2004) proses yang telah dilalui oleh S2 masuk dalam tahap *recognition of multiplicative relationships*. Cayton-Hodges, dkk (2012) menyatakan bahwa siswa pada level ini memiliki intuisi tentang adanya hubungan multiplikatif tetapi ketika siswa gagal dalam mencari hubungan multiplikatif tersebut maka siswa akan kembali pada strategi penjumlahan. Hal ini terlihat ketika S2 mencari banyaknya kemungkinan 2 buku dan 1 bolpoin (M_3) dengan cara menjumlahkan semua kemungkinan yang didapatnya dari mendaftar unsur satuan. Menurut Langral dan Swafford (2000), strategi yang digunakan oleh S2 termasuk dalam level *informal reasoning about proportional situations* dimana siswa menggunakan strategi seperti menggunakan model atau cara manipulatif untuk menggambarkan situasi yang ada.

S3 menyelesaikan masalah MPM dengan menggabungkan strategi penjumlahan dengan dan perkalian. S3 menggunakan strategi penjumlahan untuk mencari banyaknya 2 pasang buku yang dapat dibentuk dari 4 pasang buku berbeda (M_1). Kemudian, S3 dapat melihat hubungan multiplikatif antara (M_1) dan (M_2) untuk menentukan (M_3). Berdasarkan tahap mengembangkan penalaran proporsional oleh Bexter dan Junker (dalam Weaver and Junker, 2004) proses yang telah dilalui oleh S2 masuk dalam tahap *accommodating covariance and invariance*. Cayton-Hodges, dkk (2012) menyatakan bahwa siswa pada level ini siswa mulai mengembangkan suatu model perubahan yang dapat melihat ketika suatu kuantitas mungkin saja berubah. Hal ini terlihat ketika S3 menggambarkan alasan yang melatar belakangi model $M_3 = M_1 \times M_2$. Menurut Langral dan Swafford (2000), strartegi yang digunakan oleh S3 termasuk dalam level *informal reasoning about proportional situations* dan *quantitative reasoning*. Strategi *informal reasoning about proportional situations* dapat dilihat saat S3 mencari M_1 dengan cara mendaftar yang merupakan metode manipulatif yang dapat menggambarkan M_1 . level *quantitative reasoning* saat S3 mencari M_3 dimana S3 berpikir bahwa jika banyak bolpoin 1 maka $M_3 = 6 \times 1 = 6$, jika ada 2 bolpoin maka $M_3 = 6 \times 2 = 12$, karena ada 3 bolpoin maka $M_3 = 6 \times 3 = 18$. S3 berada pada dua level yang berbeda ketika dibandingkan dengan penelitian yang dilakukan Langral dan Swafford karena masalah yang digunakan pada penelitian tersebut merupakan jenis-jenis masalah proporsi langsung. Tetapi, pada penelitian ini masalah yang digunakan merupakan masalah *product of measurement* yang merupakan masalah yang melibatkan perkalian kartesian antara dua ruang pengukuran pada ruang pengukuran yang ke tiga.

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa proses berpikir matematika siswa kelas VIII dalam menyelesaikan masalah *product of measurement* dikelompokkan berdasarkan lima tahapan dalam membangun penalaran proporsional oleh Bexter dan Junker, yaitu (1) qualitative, (2) early attempts at quantifying, (3) recognition of multiplicative relationships, (4) accommodating covariance and invariance, dan (5) functional and scalar relationships. Berikut kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini.

- Siswa dengan kemampuan rendah (S1) menggunakan strategi penjumlahan antara dua ruang pengukuran. S1 pertama mencari banyaknya M_1 dengan cara mendaftar banyaknya pasangan buku yang mungkin yaitu 6 pasang. S1 mengetahui dari soal bahwa M_2 adalah banyaknya bolpoin yaitu 3. Kemudian untuk mencari banyaknya kemungkinan yang ada S1 menjumlahkan antara M_1 dan M_2 sehingga diperoleh jawabannya adalah 9 kemungkinan. Berdasarkan uraian tersebut diketahui bahwa siswa menggunakan cara menjumlahkan dua ruang pengukuran, M_1 dan M_2 . Berdasarkan teori Bexter dan Junker maka penalaran proporsional S1 berada pada tahap *early attempts at quantifying* yaitu upaya awal dalam pengukuran sering melibatkan perbedaan konstanta penjumlahan dari pada menggunakan hubungan perkalian. Pada tahap ini, siswa masih mengandalkan perhitungan dengan menggunakan penambahan atau pengurangan.
- Siswa dengan kemampuan sedang (S2) menyelesaikan masalah dengan cara mendaftar semua kemungkinan yang ada kemudian menjumlahkan semuanya. S2 menyadari bahwa kemungkinan masalah *product of measurement* dapat dikerjakan dengan metode fungsi, namun S2 mengalami kegagalan dalam mengingat bagaimana cara menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan pendekatan metode fungsi. Oleh karena itu, S2 mendaftar semua kemungkinan yang ada kemudian menjumlahkan semuanya.

Berdasarkan uraian tersebut diketahui bahwa siswa menggunakan cara menjumlahkan unsur satuan dari kemungkinan susunan 2 buku dan 1 pensil. Siswa menyadari bahwa masalah tersebut mungkin dapat diselesaikan dengan rumus fungsi namun siswa tidak dapat menentukan bagaimana hubungan yang terjadi pada setiap ruang pengukurannya, sehingga siswa memilih menggunakan strategi penjumlahan. Berdasarkan teori Bexter dan Junker maka penalaran proporsional S2 berada pada tahap *recognition of multiplicative relationships*. Pada tahap ini, siswa memiliki intuisi bahwa rasio adalah dua bilangan yang berubah secara bersama-sama tetapi perubahan tersebut mungkin disebabkan oleh penjumlahan atau perkalian siswa lebih sering menggunakan strategi penjumlahan ketika penalaran multiplikatif yang diharapkan untuk digunakan.

- c. Siswa dengan kemampuan tinggi (S3) menyelesaikan masalah dengan cara mendaftar banyaknya pengukuran yang pertama (M_1) kemudian mengalikan dengan pengukuran yang kedua (M_2). M_1 adalah banyaknya susunan 2 buku berbeda dari 4 buku yang ada. S3 mendaftar masing masing kemungkinan kemudian menjumlahkannya untuk memperoleh M_1 . M_2 adalah banyaknya bolpoin yaitu 3. Karena yang diminta adalah banyak pasangan yang mungkin dari 2 buku dan 1 bolpoin maka siswa melakukan metode perkalian 6×3 , sehingga diperoleh banyaknya kemungkinan susunan adalah 18.

Berdasarkan uraian tersebut diketahui bahwa siswa menggunakan cara perkalian untuk menentukan banyak kemungkinan susunan. Siswa menggunakan cara mencari unsur satuan dan menjumlahkan unsur satuan tersebut untuk mencari M_2 . Kemudian S3 mengembangkan model perubahan multiplikatif untuk mencari pengukuran yang ketiga (M_3), dengan dasar jika ada 1 bolpoin maka ada 6 susunan yang mungkin, jika ada 2 bolpoin yang berbeda maka ada 12 susunan, sehingga jika ada 3 bolpoin yang berbeda maka untuk mencari banyak kemungkinan susunan adalah $6 \times 3 = 18$. Berdasarkan teori Bexter dan Junker maka penalaran proporsional S2 berada pada tahap *accommodating covariance and invariance*. Pada tahap ini, Siswa mulai mengembangkan suatu model perubahan multiplikatif. Siswa menyadari bahwa ketika beberapa kuantitas mungkin berubah, hubungan antara kuantitas-kuantitas tersebut invariant (tetap). Siswa menggunakan strategi perkalian pada konteks atau masalah tertentu, namun jika siswa dihadapkan pada konteks yang tergolong sulit siswa akan kembali menggunakan penalaran penjumlahan seperti yang dilakukan oleh S3 ketika mencari M_1 .

Berdasarkan uraian di atas maka dapat disimpulkan bahwa perkembangan kemampuan proporsional siswa kelas VIII SMPN 21 Malang yang memiliki kemampuan matematika rendah berada pada tahap *early attempts at quantifying* (tahap 2), yang memiliki kemampuan matematika sedang berada pada tahap *recognition of multiplicative relationships* (tahap 3), dan yang memiliki kemampuan matematika tinggi berada pada tahap *accommodating covariance and invariance* (tahap 4).

Saran

Berdasarkan kesimpulan yang telah dibuat, maka dapat disarankan beberapa hal terkait pembelajaran matematika adalah.

- Kemampuan penalaran proporsional siswa dapat ditingkatkan dengan cara memberikan masalah proporsional yang beragam pada siswa.
- Kajian tentang penalaran proporsional dan strategi yang digunakan oleh siswa pada penelitian ini masih terbatas pada masalah yang terkait dengan masalah multiplikatif tipe *product of measurement* dimana masalah yang digunakan terkait dengan masalah kombinatorik. Oleh karena itu, perlu adanya kajian yang lebih mendalam untuk tipe masalah multiplikatif lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

- Cai, Jinfa & Sun, Wei. 2002. Developing Students' Proportional Reasoning: A Chinese Perspective. Dalam Bonnie Litwiller & George Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*, (hlm. 195-205). NCTM.
- Cetin, Hatice & Ertekin, Erhan. 2011. The Relationship Between Eighth Grade Primary School Students' Proportional Reasoning Skills and Success in Solving Equations. *International Journal of Instruction*, 4(1), 47-62.
- Fleener, M. Jayne. 1993. *Proportional Reasoning of Preservice Elementary Education Major: An Epistemic Model of The Proportional Reasoning Construct*. Makalah disajikan dalam The Annual Meeting of The American Educational Research Association, Atlanta, 12-16 April.

- Cayton-Hodges, G., dkk. 2012. *Technology Enhanced Assessments in Mathematics and Beyond: Strengths, Challenges, and Future Directions*. Makalah disajikan dalam Invitational Research Symposium on Technology Enhanced Assessments, 7-8 Mei.
- Hines, Ellen & McMahon, Mary. 2005. Interpreting idle School Students' Proportional Reasoning Strategies: Observations from Preservice Teachers. *School Science and Mathematics*, 105(2), 88-105.
- Langral, Cynthia W. & Swafford, Jane. 2000. Three Ballons for Two Dollars: Developing Proportional Reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6 (4), 254-261.
- Miles, Mattew & Huberman, A. Michael. 1992. *Analisis Data Kualitatif*. Terjemahan Tjetjep Rohendi. 2014. Jakarta: Universitas Indonesia Press.
- Norton, S.. 2005. The Construction of Proportional Reasoning. Dalam Helen L. & Jill L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (hlm. 17-24). Melbourne: PME.
- Sari, Ika Puspita & Sufri. 2014. Analisis Penalaran Proporsional Siswa dengan Gaya Belajar Auditori dalam Menyelesaikan Soal Perbandingan pada Siswa SMP Kelas VII. *Edumatica*, 4(2), 48-55.
- Sopamena, Patma & Rahaded, Sara. 2015. Karakterisasi Penalaran Proporsional Mahasiswa IAIN Ambon dalam Memecahkan Masalah Rasio dan Proporsi. *Jurnal Fikratuna*, 7(2), 320-332.
- Sriraman, B. & Steinhorsdottir, O.. 2009. Icelandic 5th-Grade Girls' Developmental Trajectories in Proportional Reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 21(1), 6-30.
- Tall, David. 2008. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20 (2), 5-24.
- Vergnaud, Gerard. 1994. Multiplicative Conceptual Field: What and Why? Dalam Guershon Harel & Jere Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in The Learning of Mathematics* (hlm. 41-59). New York: State University of New York Press.
- Weaver, Rhiannon & Junker, Brian W.. 2004. *Model Specification for Cognitive Assessment of Proportional Reasoning I*. Department of Statistics Technical Report No. 777. Pittsburgh, PA: Carnegie Mellon University.
- Wright, Vincent John. 2011. *The Development of Multiplicative Thinking and Proportional Reasoning: Models of Conceptual Learning and Transfer*. Thesis tidak diterbitkan. Waikato: The University of Waikato.