

Analisis Transisi Fase Model Ising Dua Dimensi pada Kisi Teratur dan Tak Teratur Menggunakan Metode Monte Carlo

Fina Nidha Ilmu Fidha¹, Nailul Hasan², Nenni Mona Aruan³

Program Studi Fisika, Fakultas Teknik dan Sains, Universitas Pembangunan Nasional "Veteran" Jawa Timur
e-mail: nailul.hasan.fisika@upnjatim.ac.id

Abstrak: Model Ising dua dimensi merupakan salah satu model yang banyak digunakan untuk mempelajari fenomena transisi fase pada sistem magnetik. Penelitian ini bertujuan membandingkan karakteristik sistem Ising pada kisi teratur dan kisi tak teratur menggunakan metode Monte Carlo berbasis algoritma Metropolis. Simulasi dilakukan pada ukuran kisi 20×20 , 40×40 , dan 60×60 dengan 10.000 langkah Monte Carlo serta rentang temperatur 1,5–3,5. Parameter yang diamati meliputi magnetisasi, energi rata-rata per spin, dan kapasitas kalor. Hasil simulasi memperlihatkan bahwa magnetisasi menurun seiring meningkatnya temperatur, sedangkan energi berubah secara bertahap menuju keadaan yang lebih tidak teratur. Kapasitas kalor mencapai nilai maksimum pada rentang temperatur sekitar 2,2–2,3 yang mengindikasikan terjadinya transisi fase dari feromagnetik ke paramagnetik. Dibandingkan dengan kisi teratur, kisi tak teratur menghasilkan fluktuasi yang lebih besar, tetapi pola perubahan ketiga parameter tetap menunjukkan kecenderungan yang sama. Hasil yang diperoleh juga berada dekat dengan temperatur kritis teoritis model Ising dua dimensi, sehingga metode Monte Carlo berbasis algoritma Metropolis dapat digunakan untuk menggambarkan karakteristik transisi fase pada kedua struktur kisi.

Kata Kunci: Model Ising, Monte Carlo, Transisi Fase

Abstract: The two-dimensional Ising model is one of the most widely used models for investigating phase transition phenomena in magnetic systems. This study aims to compare the characteristics of two-dimensional Ising systems on regular and irregular lattices using the Monte Carlo method with the Metropolis algorithm. Simulations were performed on lattice sizes of 20×20 , 40×40 , and 60×60 with 10,000 Monte Carlo steps over a temperature range of 1.5–3.5. The observed parameters included magnetization, average energy per spin, and specific heat. The simulation results show that magnetization decreases as temperature increases, while the average energy changes gradually as the system evolves toward a more disordered state. The specific heat reaches its maximum value around the temperature range of 2.2–2.3, indicating the occurrence of a phase transition from the ferromagnetic phase to the paramagnetic phase. Compared with the regular lattice, the irregular lattice exhibits larger fluctuations, although the overall behavior of the three physical quantities remains consistent. These findings are also in good agreement with the theoretical critical temperature of the two-dimensional Ising model, demonstrating that the Monte Carlo method based on the Metropolis algorithm is effective for describing the phase transition characteristics of both lattice structures.

Keywords: Model Ising, Monte Carlo Simulations, Metropolis Algorithm, Phase Transition

Perubahan sifat magnetik suatu material akibat kenaikan temperatur menjadi salah satu topik yang banyak dipelajari dalam fisika statistik. Pada temperatur rendah, spin cenderung tersusun searah sehingga sistem berada dalam keadaan yang teratur. Ketika temperatur meningkat, energi termal menyebabkan orientasi spin berubah secara acak sehingga keteraturan sistem mulai berkurang. Perubahan tersebut dikenal sebagai transisi fase dari feromagnetik ke paramagnetik. Salah satu model yang banyak digunakan untuk mempelajari fenomena tersebut adalah model Ising dua dimensi karena mampu menggambarkan interaksi antarspin secara sederhana, tetapi tetap dapat merepresentasikan perilaku dasar sistem magnetik [1]. Perkembangan

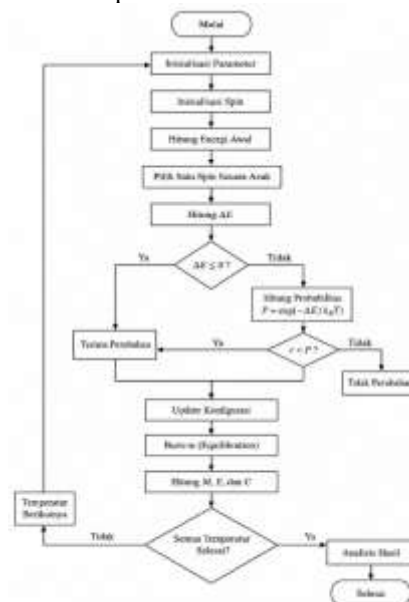
teknologi komputasi membuat penyelesaian model Ising semakin banyak dilakukan melalui simulasi numerik. Salah satu metode yang paling sering digunakan adalah Monte Carlo dengan algoritma Metropolis. Metode ini memungkinkan perubahan keadaan sistem diamati pada berbagai temperatur sehingga karakteristik magnetisasi, energi rata-rata per spin, dan kapasitas kalor dapat dianalisis untuk mengidentifikasi terjadinya transisi fase [2].

Beberapa penelitian sebelumnya telah menerapkan metode Monte Carlo pada model Ising dua dimensi. Penelitian yang dilakukan oleh Kumar menunjukkan bahwa perubahan magnetisasi dan kapasitas kalor dapat digunakan untuk menentukan temperatur kritis sistem [3]. Penelitian lain juga melaporkan bahwa algoritma Metropolis mampu menggambarkan perubahan magnetisasi dan energi yang sesuai dengan karakteristik model Ising dua dimensi [4]. Selain itu, peningkatan temperatur diketahui menyebabkan keteraturan spin berkurang sehingga sifat magnetik sistem ikut berubah [5]. Hasil-hasil tersebut menunjukkan bahwa simulasi Monte Carlo masih menjadi pendekatan yang efektif untuk mempelajari fenomena transisi fase.

Sebagian besar penelitian terdahulu menggunakan struktur kisi teratur sehingga setiap spin memiliki susunan tetangga yang relatif sama. Sementara itu, kajian mengenai model Ising pada kisi tak teratur masih belum banyak dilakukan. Pada kisi tak teratur, hubungan antarspin tidak lagi seragam sehingga interaksi yang terjadi menjadi lebih bervariasi dibandingkan dengan kisi teratur. Perbedaan karakteristik tersebut diperkirakan memengaruhi perubahan magnetisasi, energi, dan kapasitas kalor selama proses transisi fase. Oleh karena itu, penelitian ini memfokuskan kajian pada perbandingan karakteristik model Ising dua dimensi pada kisi teratur dan kisi tak teratur menggunakan metode Monte Carlo berbasis algoritma Metropolis.

METODE

Penelitian ini menggunakan metode simulasi Monte Carlo berbasis algoritma Metropolis untuk menganalisis karakteristik model Ising dua dimensi pada kisi teratur dan kisi tak teratur. Simulasi dilakukan pada ukuran kisi 20×20 , 40×40 , dan 60×60 dengan 10.000 langkah Monte Carlo pada rentang temperatur 1,5–3,5. Parameter yang diamati meliputi magnetisasi rata-rata, energi rata-rata per spin, dan kapasitas kalor. Data hasil simulasi kemudian dianalisis secara kuantitatif untuk mengetahui pengaruh perubahan temperatur terhadap karakteristik sistem serta mengidentifikasi temperatur transisi fase.



Gambar 1. Algoritma simulasi Monte Carlo dengan algoritma Metropolis.

Model Ising Dua Dimensi

Model Ising dua dimensi digunakan sebagai dasar untuk menggambarkan interaksi spin pada sistem magnetik. Dalam model ini, setiap titik kisi ditempati oleh sebuah spin yang memiliki dua kemungkinan orientasi, yaitu (+1) atau (-1). Interaksi

Analisis Transisi Fase Model Ising Dua Dimensi pada Kisi Teratur

hanya terjadi antara spin yang bertetangga terdekat (nearest neighbor). Energi total sistem dinyatakan menggunakan persamaan Hamiltonian.

$$[H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j] \quad (1)$$

dengan (H) merupakan energi total sistem, (J) adalah konstanta kopling antarspin, sedangkan (s_i) dan (s_j) menyatakan orientasi spin pada titik kisi ke-(i) dan ke-(j).

Penelitian ini menggunakan dua jenis struktur kisi, yaitu kisi teratur dan kisi tak teratur. Pada kisi teratur, setiap spin memiliki jumlah tetangga yang sama sehingga interaksi antarspin berlangsung secara seragam. Sebaliknya, pada kisi tak teratur hubungan antarspin tidak seragam sehingga jumlah tetangga setiap spin dapat berbeda. Perbedaan tersebut menyebabkan distribusi interaksi menjadi lebih bervariasi sehingga karakteristik sistem yang dihasilkan juga dapat berbeda.

Magnetisasi rata-rata dihitung menggunakan persamaan

$$[\langle |M| \rangle = \frac{1}{N} \langle |\sum_{i=1}^N s_i| \rangle] \quad (2)$$

Energi rata-rata dihitung menggunakan persamaan

$$[\langle E \rangle = \frac{\langle H \rangle}{N}] \quad (3)$$

Sedangkan kapasitas kalor dihitung menggunakan persamaan

$$[C = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{Nk_B T^2}] \quad (4)$$

Algoritma Monte Carlo Metropolis

Metode Monte Carlo berbasis algoritma Metropolis digunakan untuk menentukan perubahan keadaan sistem melalui proses pembalikan spin secara acak. Pada setiap langkah simulasi dihitung perubahan energi ((ΔE)) akibat pembalikan spin. Apabila ($\Delta E \leq 0$), perubahan spin diterima secara langsung. Sebaliknya, apabila ($\Delta E > 0$), perubahan diterima dengan probabilitas

$$[P(\Delta E) = e^{-\Delta E/(k_B T)}] \quad (1)$$

Sebelum proses pengambilan data dilakukan, sistem terlebih dahulu melalui tahap equilibration (burn-in) selama 1.000 langkah Monte Carlo awal agar mencapai keadaan setimbang. Setelah kondisi setimbang tercapai, nilai magnetisasi, energi rata-rata per spin, dan kapasitas kalor dihitung pada setiap temperatur simulasi.

Parameter Simulasi

Simulasi dilakukan pada ukuran kisi 20×20 , 40×40 , dan 60×60 dengan rentang temperatur 1,5 hingga 3,5 menggunakan 10.000 langkah Monte Carlo pada setiap temperatur. Hasil simulasi ditampilkan dalam bentuk grafik magnetisasi, energi rata-rata per spin, dan kapasitas kalor untuk membandingkan karakteristik sistem pada kisi teratur dan kisi tak teratur.

Analisis Data

Data hasil simulasi dianalisis berdasarkan perubahan magnetisasi, energi rata-rata per spin, dan kapasitas kalor terhadap temperatur. Temperatur kritis ditentukan dari puncak kurva kapasitas kalor, kemudian dibandingkan dengan nilai teoritis model Ising dua dimensi sebesar ($T_c = 2,269$). Analisis juga dilakukan dengan membandingkan karakteristik sistem pada kisi teratur dan kisi tak teratur untuk mengetahui pengaruh struktur kisi terhadap proses transisi fase.

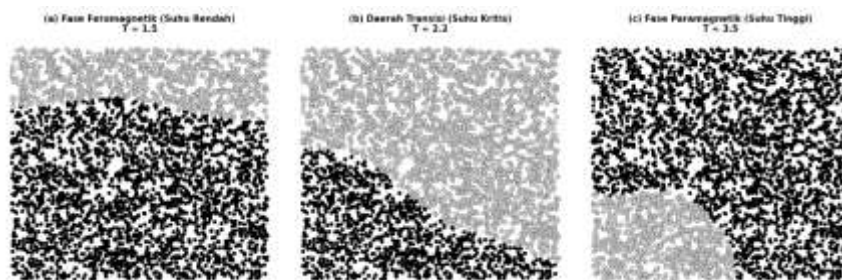
HASIL DAN PEMBAHASAN

Konfigurasi Spin pada Berbagai Temperatur

Untuk memberikan gambaran kondisi mikroskopik sistem selama proses simulasi, konfigurasi spin diamati pada beberapa temperatur yang mewakili keadaan sebelum, saat, dan setelah transisi fase. Snapshot konfigurasi spin disajikan pada temperatur rendah (($T = 1,5$)), temperatur yang mendekati temperatur kritis (($T = 2,3$)), dan temperatur tinggi (($T = 3,5$)).



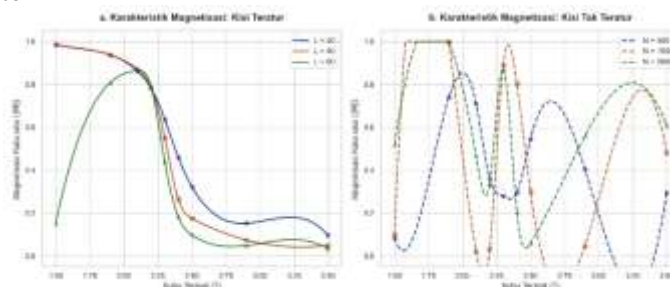
Gambar 2. Visualisasi Kisi Teratur 60x60



Gambar 2. Visualisasi Kisi Tak Teratur 60x60

Pada temperatur rendah, sebagian besar spin masih tersusun searah sehingga sistem berada pada fase feromagnetik. Kondisi ini menunjukkan bahwa interaksi antarspin masih mampu mempertahankan keteraturan sistem sehingga nilai magnetisasi relatif tinggi. Ketika temperatur mendekati temperatur kritis, energi termal mulai mengganggu keteraturan spin sehingga terbentuk domain-domain dengan orientasi yang berbeda. Setelah temperatur meningkat hingga ($T=3,5$), orientasi spin menjadi semakin acak dan sistem memasuki fase paramagnetik. Perubahan konfigurasi spin tersebut sejalan dengan perubahan magnetisasi, energi, dan kapasitas kalor yang diperoleh dari hasil simulasi.

Karakteristik Magnetisasi Sistem



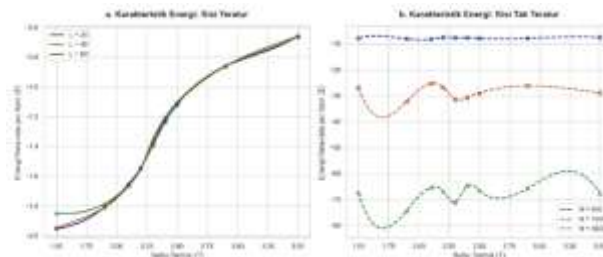
Gambar 4. Grafik Karakteristik Magnetisasi Sistem

Gambar 3.2 memperlihatkan perubahan nilai magnetisasi rata-rata terhadap temperatur pada kisi teratur dan kisi tak teratur untuk ukuran kisi 20×20 , 40×40 , dan 60×60 . Pada temperatur rendah, nilai magnetisasi masih mendekati satu. Hal ini menunjukkan bahwa sebagian besar spin masih tersusun searah sehingga sistem berada pada fase feromagnetik. Pada kondisi tersebut, energi termal belum cukup besar untuk mengubah orientasi spin sehingga interaksi antarspin masih mampu mempertahankan keteraturan sistem. Seiring meningkatnya temperatur, nilai magnetisasi mulai menurun. Penurunan ini terjadi karena energi termal yang semakin besar membuat spin lebih mudah berubah orientasi. Akibatnya, susunan spin yang semula teratur mulai kehilangan keteraturannya. Perubahan paling jelas terlihat ketika temperatur berada di sekitar 2,2–2,3. Pada rentang temperatur ini, magnetisasi turun lebih cepat dibandingkan temperatur sebelumnya, yang menunjukkan bahwa sistem sedang mengalami transisi fase.

Setelah temperatur melewati daerah transisi, nilai magnetisasi semakin mendekati nol. Kondisi ini menunjukkan bahwa orientasi spin sudah tidak lagi didominasi oleh satu arah sehingga sistem memasuki fase paramagnetik. Hasil tersebut sesuai dengan karakteristik model Ising dua dimensi, yaitu magnetisasi akan berkurang seiring meningkatnya temperatur hingga akhirnya menghilang pada temperatur tinggi. Perbedaan juga terlihat antara kisi teratur dan kisi tak teratur. Pada kisi teratur, penurunan magnetisasi cenderung lebih halus karena setiap spin memiliki jumlah tetangga yang sama sehingga interaksi antarspin berlangsung lebih seragam. Sebaliknya, kurva pada kisi tak teratur terlihat lebih berfluktuasi. Hal ini disebabkan oleh jumlah tetangga setiap spin yang tidak sama sehingga kekuatan interaksi di setiap bagian sistem menjadi berbeda. Akibatnya, perubahan orientasi spin tidak terjadi secara seragam dan menghasilkan fluktuasi magnetisasi yang lebih besar.

Ukuran kisi juga memengaruhi bentuk kurva yang dihasilkan. Pada ukuran kisi 20×20 perubahan magnetisasi masih terlihat lebih landai, sedangkan pada ukuran 40×40 dan 60×60 penurunannya menjadi lebih tajam di sekitar temperatur kritis. Kondisi ini menunjukkan bahwa semakin besar ukuran kisi, pengaruh finite-size effect semakin berkurang sehingga hasil simulasi semakin mendekati perilaku teoritis model Ising dua dimensi.

Karakteristik Energi Sistem



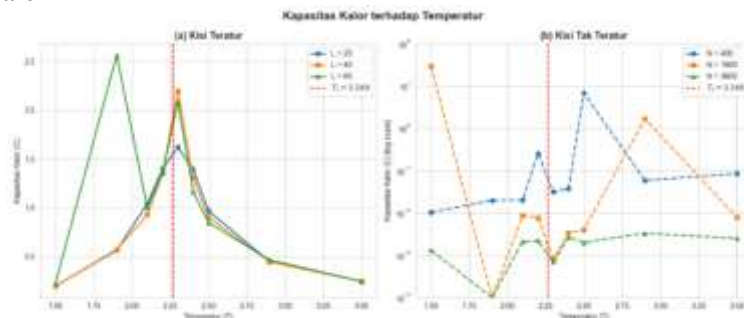
Gambar 5. Grafik Karakteristik Energi Sistem

Pada temperatur rendah, energi rata-rata per spin berada pada nilai minimum karena sebagian besar spin masih tersusun secara teratur sehingga interaksi antarspin menghasilkan keadaan yang stabil. Seiring meningkatnya temperatur, energi termal menyebabkan semakin banyak spin berubah orientasi sehingga energi sistem meningkat secara bertahap. Berbeda dengan magnetisasi, perubahan energi berlangsung lebih halus karena energi merupakan besaran rata-rata dari keseluruhan sistem. Di sekitar temperatur kritis terlihat perubahan gradien kurva yang menunjukkan meningkatnya fluktuasi orientasi spin selama proses transisi fase. Setelah sistem memasuki fase paramagnetik, perubahan energi kembali berlangsung lebih stabil.

Pada kisi tak teratur, perubahan energi terlihat lebih berfluktuasi dibandingkan kisi teratur. Hal ini disebabkan oleh distribusi jumlah tetangga yang tidak seragam sehingga setiap spin memiliki kontribusi energi yang berbeda-beda. Meskipun demikian, kecenderungan perubahan energi pada kedua struktur tetap sama dan sesuai dengan teori model Ising dua dimensi.

Hasil simulasi juga menunjukkan bahwa ukuran kisi yang lebih besar menghasilkan kurva energi yang lebih halus. Hal ini menunjukkan bahwa pengaruh ukuran sistem semakin berkurang sehingga hasil simulasi semakin mendekati perilaku sistem pada batas termodinamik.

Karakteristik Kapasitas Kalor



Gambar 6. Grafik Karakteristik Kapasitas Kalor

Kapasitas kalor meningkat seiring kenaikan temperatur hingga mencapai nilai maksimum di sekitar temperatur kritis, kemudian kembali menurun setelah temperatur tersebut terlewati. Puncak kapasitas kalor menunjukkan bahwa sistem mengalami fluktuasi energi terbesar sehingga dapat digunakan sebagai indikator terjadinya transisi fase. Secara fisika,

peningkatan kapasitas kalor terjadi karena sistem memerlukan energi yang lebih besar untuk mengubah orientasi spin ketika mendekati temperatur kritis. Pada kondisi tersebut terbentuk domain-domain spin dengan orientasi yang berbeda sehingga perubahan energi menjadi sangat sensitif terhadap perubahan temperatur. Setelah sebagian besar spin berada dalam keadaan acak, perubahan energi kembali berlangsung lebih kecil sehingga kapasitas kalor menurun.

Perbedaan bentuk kurva antara kisi teratur dan kisi tak teratur menunjukkan bahwa struktur kisi memengaruhi besar fluktuasi energi selama simulasi. Pada kisi tak teratur, distribusi interaksi yang tidak seragam menyebabkan fluktuasi kapasitas kalor lebih besar dibandingkan kisi teratur, namun posisi puncak kapasitas kalor tetap berada pada rentang temperatur yang hampir sama. Berdasarkan hasil simulasi, temperatur kritis diperoleh pada kisaran $T_c \approx 2,30$. Nilai tersebut dibandingkan dengan temperatur kritis teoritis model Ising dua dimensi sebesar $T_c = 2,269$. Perhitungan galat relatif menghasilkan nilai sekitar 1,37%, yang menunjukkan bahwa hasil simulasi memiliki kesesuaian yang baik dengan teori. Selisih yang kecil tersebut dipengaruhi oleh ukuran kisi yang terbatas, jumlah langkah Monte Carlo, serta fluktuasi statistik yang merupakan karakteristik umum dari metode Monte Carlo.

PENUTUP

Berdasarkan hasil simulasi Monte Carlo berbasis algoritma Metropolis pada model Ising dua dimensi, dapat disimpulkan bahwa:

Peningkatan temperatur menyebabkan nilai magnetisasi rata-rata menurun, energi rata-rata per spin meningkat secara bertahap, sedangkan kapasitas kalor mencapai nilai maksimum di sekitar temperatur kritis. Ketiga parameter tersebut menunjukkan karakteristik transisi fase dari feromagnetik menuju paramagnetik.

Perbandingan antara kisi teratur dan kisi tak teratur menunjukkan bahwa struktur kisi memengaruhi karakteristik hasil simulasi. Kisi teratur menghasilkan perubahan parameter yang lebih halus, sedangkan kisi tak teratur memperlihatkan fluktuasi yang lebih besar akibat distribusi interaksi antarspin yang tidak seragam.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa temperatur kritis berada pada kisaran $T \approx 2,30$. Nilai tersebut mendekati temperatur kritis teoritis model Ising dua dimensi, yaitu $T_c = 2,269$, dengan galat relatif sekitar 1,37%, sehingga hasil simulasi dapat dikatakan memiliki kesesuaian yang baik dengan teori.

Penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan menggunakan jumlah iterasi yang lebih besar, menambahkan analisis statistik hasil simulasi, serta mengkaji model Ising pada jenis kisi atau metode simulasi lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

- [1] H. R. K. Gaudi, R. Neupane, K. B. Rai, and K. Giri, "Monte-Carlo simulation of phase transition in 2D and 3D Ising model," *Scientific World*, vol. 16, no. 16, pp. 135–140, 2023.
- [2] T. Gu, "Monte Carlo simulation of phase transition in classical Ising model," *Highlights in Science, Engineering and Technology*, vol. 64, pp. 205–212, 2023, doi: 10.54097/hset.v64i.11281.
- [3] M. Hasenbusch, "Critical exponents of the two-dimensional Ising model from high-precision Monte Carlo simulations," *Physical Review E*, vol. 100, no. 1, 2019.
- [4] T. Hofmann, "Quantum Monte Carlo simulation of the 3D Ising transition on the fuzzy sphere," *Journal of Statistical Physics*, 2024.
- [5] B. Iqbal and K. Sarkar, "Monte Carlo simulation of anisotropic Ising model using Metropolis and Wolff algorithm," arXiv, 2024, doi: 10.48550/arXiv.2411.06819.
- [6] A. S. Kumar, "Phase transition study of 2D Ising model using Monte Carlo simulation," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1712, p. 012016, 2020, doi: 10.1088/1742-6596/1712/1/012016.
- [7] D. P. Landau and K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, 5th ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2021.
- [8] Z. C. Liu, "Monte Carlo simulation study of two-dimensional spin systems," *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, vol. 542, Art. no. 123456, 2020.

- [9] S. I. Lutan, "Simulasi Monte Carlo untuk model Ising 2D pada kisi bujur sangkar menggunakan algoritma Metropolis," *Jurnal Fisika dan Pembelajarannya*, pp. 46–53, 2021.
- [10] A. G. Malakis, "Finite-size scaling analysis of the two-dimensional Ising model on different lattice geometries," *Physical Review E*, vol. 101, no. 5, 2020.
- [11] D. Mardiansyah, "Analisa sifat ferromagnetik material menggunakan metode Monte Carlo," *Jurnal Pendidikan Fisika Indonesia*, vol. 2, no. 2, 2013.
- [12] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, "Equation of state calculations by fast computing machines," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 21, no. 6, pp. 1087–1092, 1953, doi: 10.1063/1.1699114.
- [13] L. Onsager, "Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition," *Physical Review*, vol. 65, nos. 3–4, pp. 117–149, 1944, doi: 10.1103/PhysRev.65.117.
- [14] R. K. Pathria and P. D. Beale, *Statistical Mechanics*, 4th ed. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2022.
- [15] A. Riyadi et al., "Analisis perilaku magnetisasi sistem Ising dua dimensi menggunakan metode Monte Carlo," *Jurnal Fisika dan Aplikasinya*, pp. 89–96, 2020.
- [16] T. Gu, "Monte Carlo simulation of phase transition in classical Ising model," *Highlights in Science, Engineering and Technology*, vol. 63, pp. 126–132, 2023.
- [17] Z. V. D. Vatansever, "Monte Carlo study of the two-dimensional kinetic Ising model under a nonantisymmetric magnetic field," *arXiv*, 2024. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2409.20152>
- [18] N. T.-M. Walker et al., "Deep learning on the two-dimensional Ising model to extract the crossover region with a variational autoencoder," *Scientific Reports*, vol. 10, Art. no. 13047, 2020, doi: 10.1038/s41598-020-69931-8.
- [19] C. N. Yang, "The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model," *Physical Review*, vol. 85, no. 5, pp. 808–816, 1952, doi: 10.1103/PhysRev.85.808.
- [20] Y. Yüksel, "A Monte Carlo study of dynamic phase transitions on non-regular lattices," *Entropy*, vol. 27, no. 5, Art. no. 530, 2025, doi: 10.3390/e27050530.